

第三节、不定积分的意思

一、原函数与不定积分：若 $F'(x) = f(x)$ ，则 $F(x)$ 叫 $f(x)$ 的原函数，由于

$[F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$ ，因此 $F(x) + c$ (c 是常数) 都是 $f(x)$ 的原函数。

当 $F'(x) = f(x)$ 时，则 $dF(x) = f(x)dx$ ， $F(x) + c$ 也叫做 $f(x)dx$ 的不定积分，可

记为 $\int f(x)dx = F(x) + c$ (c 是常数)

例如 $(x^3)' = 3x^2$ ，于是 $\int 3x^2 dx = x^3 + c$ ，也可表示成 $\int 3x^2 dx = \int dx^3 = x^3 + c$

因此微分与不定积分是互逆运算，一般地 $\int dF(x) = F(x) + c$

即一个函数先取微分再取不定积分就回归于此函数。这与 $5+6-6=5$, $5 \times 4 \div 4 = 5$, $\log_2 2^3 = 3$ 等等是类似的。

再如， $\int \cos x dx = \int d\sin x = \sin x + c$ ，因此能熟练微分的运算不定积分就没有问题了

二、常用公式

1、因 $(ax)' = a$ ，故 $\int a dx = ax + c$ 。也可 $\int a dx = \int d(ax) = ax + c$

2、因 $(x^n)' = nx^{n-1}$ ，故 $(\frac{1}{n}x^n)' = x^{n-1}$ ，故 $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ ($n \neq -1$)，

也可 $\int x^n dx = \int d\frac{1}{n+1}x^{n+1} = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$ ($n \neq -1$) 以下也类似

3、因 $(e^x)' = e^x$ ，故 $\int e^x dx = e^x + c$

4、因 $(\frac{a^x}{\ln a})' = a^x$ ，故 $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

5、因当 $x > 0$ 时， $(\ln |x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$ ；当 $x < 0$ 时， $(\ln |x|)' = [\ln(-x)]' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{1}{x}$ ，

故 $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}$ ，因此 $\int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C = \begin{cases} \ln x + C, & x > 0 \\ \ln(-x) + C, & x < 0 \end{cases}$

6、因 $(\sin x)' = \cos x$ ，故 $\int \cos x dx = \sin x + c$

7、因 $(\cos x)' = -\sin x$ ，故 $(-\cos x)' = \sin x$ ，故 $\int \sin x dx = -\cos x + c$

8、因 $(\tan x)' = \sec^2 x$ ，故 $\int \sec^2 x dx = \tan x + C$

9、因 $(\cot x)' = -\csc^2 x$ ，故 $\int \csc^2 x dx = -\cot x + C$

10、因 $(\sec x)' = \sec x \tan x$ ，故 $\int \sec x \tan x dx = \sec x + C$

11、因 $(\csc x)' = -\csc x \cot x$ ，故 $\int \csc x \cot x dx = -\csc x + C$

12、因 $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$ ，故 $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

13、因 $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ，故 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$

14、因 $(\cosh x)' = \sinh x$ ，故 $\int \sinh x dx = \cosh x + C$

15、因 $(\sinh x)' = \cosh x$ ，故 $\int \cosh x dx = \sinh x + C$

三、不定积分的性质

性质 1. $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

性质 2. $\int kf(x) dx = k \int f(x) dx$ ，（ k 为常数， $k \neq 0$ ）

例 1. 求 $\int x^2 \sqrt{x} dx$

解： $\int x^2 \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C$ $\int x^2 \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{5}{2}} dx = \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + C$

例 2、求 $\int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx$

解： $\int \frac{(x-1)^3}{x^2} dx = \int \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2} dx = \int (x - 3 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x^2}) dx$
 $= \frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} - \frac{10}{3} x^{\frac{3}{2}} + C = \frac{x^2}{2} - 3x + 3 \ln|x| + \frac{1}{x} + C$

例 3、 $\int (e^x - 3 \cos x + 2^x e^x) dx$

解： $\int (e^x - 3 \cos x + 2^x e^x) dx = \int e^x dx - 3 \int \cos x dx + \int (2e)^x dx$
 $= e^x - 3 \sin x + \frac{(2e)^x}{\ln(2e)} + C = e^x - 3 \sin x + \frac{(2e)^x}{1 + \ln 2} + C$

例 4、求 $\int \tan^2 x dx$

解： $\int \tan^2 x dx = \int (\sec^2 x - 1) dx = \int \sec^2 x dx - \int dx = \tan x - x + C$

例 5、求 $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$

解： $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx = \int \frac{1 - \cos x}{2} dx = \int \frac{1}{2} dx - \frac{1}{2} \int \cos x dx = \frac{1}{2} (x - \sin x) + C$