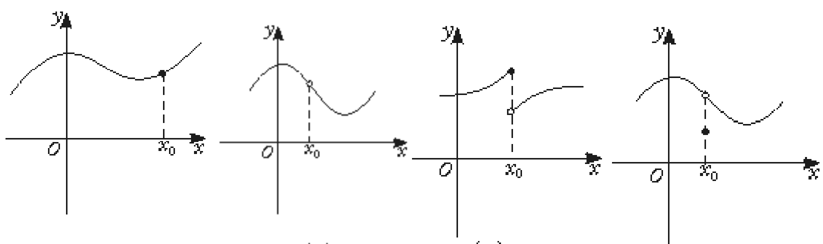
# 第三节　函数的连续性

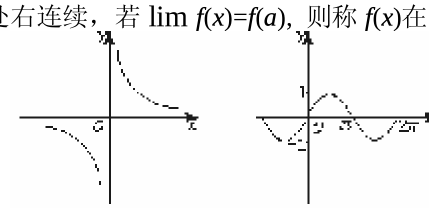
## 一、函数的连续性定义

图(1)在点 $x=x_0$ 处连续，图(2) (3) (4)在点 $x=x_0$ 处不连续。在一点处连续是指从左边连到这个点，从这个点连到右边，因此首先要在此点中有意义，从左边连到这个点是什么意思呢？就是左极限要等于该点的函数值，从右边连到这个点就是右极限要等于该点的函数值，因此在该点的极限等于该点的函数值



(1)　　(2)　　(3)　　(4)

1、左右连续：若 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$，则称 $f(x)$在 $x=a$ 处右连续，若 $\lim f(x)=f(a)$, 则称 $f(x)$在 $x=a$ 处左连续。



**例 1** 讨论下列函数在给定点处的连续性.

（1） $f(x)=\begin{cases} x+1(x\ge 0) \\ x-1(x<0) \end{cases}$，点 $x$=0.

(2) $f(x)=\begin{cases} x-1(x<1) \\ 0(x=1) \\ \dfrac{1}{x-1}(x>1) \end{cases}$ 点 $x$=1.

解：(1)因 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1\ne f(0)$,故$f(x)$ 在点 $x$=0 处不左连续

因 $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1=f(0)$,故$f(x)$ 在点 $x$=0 处右连续

**(2)** 因 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0=f(1)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x-1}$ 不存在

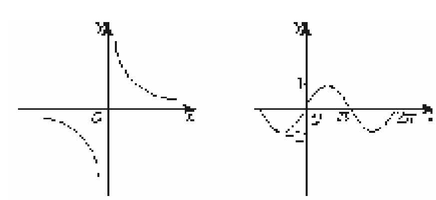
于是 故$f(x)$ 在点 $x$=1 处左连续，不右连续

2、定义： 如果函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处有定义，$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，那么函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处连续.

也就是说若函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处左右都连续，则 $f(x)$在点 $x=x_0$ 处连续

**例 1** 讨论下列函数在给定点处的连续性.

(1)$f(x)=\dfrac{1}{x}$，点 $x$=0.



(2) $f(x)=\sin x$，点 $x=\dfrac{p}{2}$.

（3） $f(x)=\begin{cases}x+1(x\geq 0)\\ x-1(x<0)\end{cases}$，点 $x$=0.

**(4)** $f(x)=\begin{cases}x^2(x<1)\\ 1 \qquad (x=1)\\ 2x-1(x>1)\end{cases}$ 点 $x$=1

解：(1)因 $f(0)$没有意义，故在点 $x=0$ 处不连续

(2)因 $\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}} g(x)=\lim\limits_{x\to\frac{p}{2}} sinx=sin\dfrac{p}{2}=g(\dfrac{p}{2})$，故在点 $x=\dfrac{p}{2}$ 处连续

(3)因 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1, f(0)=1,$ 故 $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq -1,$ 故在点 $x=0$ 处不连续

**(4)** 因 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2=1, \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(2x-1)=1, f(1)=1$

故 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)$ 在点 $x=0$ 处不连续

3、不连续的类别

第一类 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

第二类 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x), \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 都存在，且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$

第三类 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 至少一个不存在

4、函数在区间上的连续性

①如果函数 $f(x)$在某一开区间($a$，$b$)内每一点处连续，就说函数 $f(x)$在开区间($a$，$b$)内连续，或 $f(x)$是开区间($a$，$b$)内的连续函数.

②如果 $f(x)$在开区间($a$，$b$)内连续，在左端点 $x=a$ 处有 $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$即 $f(x)$在 $x=a$ 处右连续，在右端点 $x=b$ 处有 $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$,就说函数 $f(x)$在闭区间［$a$，$b$］上连续,或 $f(x)$是闭区间［$a$，$b$］上的连续函数.

例 3、求证： $f(x)=\dfrac{1}{x},$在$(0,+\infty)$ 上连续

证明：设 $\forall x_0\in(0,+\infty)$，对于 $\forall e>0$，要使$|f(x)-f(x_0)=|\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x_0}|=\dfrac{|x-x_0|}{x_0x}<e$ (1)

先作限制$|x-x_0|<\dfrac{x_0}{2}$，则 $x>\dfrac{x_0}{2}$，于是 $\dfrac{|x-x_0|}{x_0x}<\dfrac{2|x-x_0|}{{x_0}^2}$,要使(1)成立，只要

$\dfrac{2|x-x_0|}{{x_0}^2}<e,$即$|x-x_0|<\dfrac{{x_0}^2e}{2}$

因此取$d=\min\{\frac{x_0}{2},\frac{{x_0}^2e}{2}\}$，则当$|x-x_0|<d$时有$|f(x)-f(x_0)|<e$

于是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, $f(x)=\frac{1}{x}$,在$(0,+\infty)$上连续

例 4、求证：$f(x)=\sin x$,在$(-\infty,+\infty)$上连续

证明：设$\forall x_0\in(-\infty,+\infty)$，对于$\forall e>0$，

要使$|f(x)-f(x_0)=|\sin x-\sin x_0|=|2\sin\frac{x-x_0}{2}\cos\frac{x+x_0}{2}|\le 2|\sin\frac{x-x_0}{2}|$

$\le 2|\frac{x-x_0}{2}|=|x-x_0|<e$,因此取$d=e$，则当$|x-x_0|<d$时有$|f(x)-f(x_0)|<e$

于是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, $f(x)=\sin x$,在$(-\infty,+\infty)$上连续

同理可证$f(x)=\cos x$,在$(-\infty,+\infty)$上连续

例 5、求证：$f(x)=a^x(a>0且a\ne 1)$,在$(-\infty,+\infty)$上连续

1° 证$\lim\limits_{x\to 0}a^x=1(a>1)$，证明：对于$\forall e>0$，要使$|a^x-1|<e$,$1-e<a^x<1+e$,

只要$\log_a(1-e)<x<\log_a(1+e)$(1)，取$d=\min\{\log_a(1+e),-\log_a(1-e)\}$

则当$|\mathrm{x}|<d$时(1)成立，于是$\lim\limits_{x\to 0}a^x=1(a>1)$

2° 证$\lim\limits_{x\to 0}a^x=1(0<a<1)$，证明：$\lim\limits_{x\to 0}a^x=\lim\limits_{x\to 0}1/(\frac{1}{a})^x=1/1=1(0<a<1)$

3° 证$\lim\limits_{x\to x_0}a^x=a^{x_0}$, $x_0\in(-\infty,+\infty)$，证明：$\lim\limits_{x\to x_0}a^x=\lim\limits_{x\to x_0}(a^{x_0}a^{x-x_0})=a^{x_0}\times 1=a^{x_0}$

于是$f(x)=a^x(a>0且a\ne 1)$,在$(-\infty,+\infty)$上连续

## 二、函数连续的性质

1、四则运算：若$f(x),g(x)$都在$x=x_0$处连续，则

$f(x)\pm g(x)$, $f(x)g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}(g(x_0)\ne 0)$，都在在$x=x_0$处连续

这可由函数的极限的四则运算证出

2、复合函数的连续性：若函数$u=f(x)$在$x=x_0$处连续，$u_0=f(x_0)$，$y=g(u)$在$u=u_0$处连续，则复合函数$y=g(f(x))$在$x=x_0$处连续。

证明：因为$y=g(u)$在$u=u_0$处连续，对$\forall e>0$,存在$d_1>0$，

当$|u-u_0|<d_1$时，有 $|g(u)-g(u_0)|<e$ (1)

因为$u=f(x)$在$x=x_0$处连续，于是对于上面的$d_1>0$，

存在$d>0$，当$|x-x_0|<d$时，有$|f(x)-f(x_0)|<d_1$

因为$u=f(x)$，$u_0=f(x_0)$，于是$|u-u_0|<d_1$(2)

由(1)(2)得，$|g(f(x))-g(f(x_0))|<e$

因此，$\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x))=g(f(x_0))$,因此，函数$y=g(f(x))$在$x=x_0$处连续。

3、反函数连续性：若函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上严格递增(或递减)并且连续，则反函数

$x=f^{-1}(y)$在区间$[f(a),f(b)]$(或$[f(b),f(a)]$)上也连续。

证明：不妨设函数$y=f(x)$在区间$[a,b]$上严格递增。

(1)设$\forall y_0\in(f(a),f(b))$，

设$x_0=f^{-1}(y_0)\in(a,b)$,对$\forall e>0,\ \exists x_1,x_2\in(a,b),$使$x_0-e<x_1<x_0<x_2<x_0+e$，

设$y_1=f(x_1),y_2=f(x_2)$，则$y_1<y_0<y_2$，取$d=\min\{y_0-y_1,y_2-y_0\}$，

则当$y\in(y_0-d,y_0+d)$时，有

$x\in(x_1,x_2)\subseteq(x_0-e,x_0+e)$，即当$|y-y_0|<d$，有$|x-x_0|<e$即$|f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)|<e$

因此$\lim\limits_{y\to y_0} f^{-1}(y)=f^{-1}(y_0)$，于是$x=f^{-1}(y)$在区间$(f(a),f(b))$上也连续

(2)当$y_0=f(a)$时，对$\forall e>0,\ \exists x_2\in(a,b),$使$a<x_2<a+e$，

设$y_2=f(x_2)$，则$y_0<y_2$，取$d=y_2-y_0$，

则当$y\in(a,y_0+d)$时，有

$x\in(a,x_2)=(a,a+e)$，即当$|y-y_0|<d$，有$|x-a|<e$即$|f^{-1}(y)-a|<e$

因此$\lim\limits_{y\to a^+} f^{-1}(y)=a$，于是$x=f^{-1}(y)$在$y=f(a)$处右连续

同理可证：$x=f^{-1}(y)$在$y=f(b)$处左连续

## 三、初等函数的连续性

1、指数函数 $y=a^x(a>0且a\neq1),在(-\infty,+\infty)$ 上连续上面已证

2、对数函数 $y=\log_a x(常数a>0,且a\neq1)$

由于 $y=a^x$ $在(-\infty,+\infty)$ 上严格单调且连续，因此其反函数 $y=\log_a x$ 在 $在(0,+\infty)$ 上连续

3、幂函数 $y=x^a$ $(a为常数)$ $(x>0)$

由于 $y=x^a=(e^{\ln x})^a=e^{a\ln x}$，它是 $y=e^u与u=a\ln x$ 的复合函数，由指对函数的连续性知

幂函数 $y=x^a$ 在 $在(0,+\infty)$ 上连续

4、两弦函数 $y=sinx,y=\cos x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续上面已证

5、其它四个三角函数

$y=\tan x$， $余切函数y=\cot x$，$正割函数y=\sec x,余割函数y=\csc x$

可分别化为 $y=\tan x=\dfrac{sinx}{\cos x}$， $y=\cot x=\dfrac{\cos x}{sinx}$， $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x},y=\csc x=\dfrac{1}{\sin a}$

因此它们去掉分母的零点后的各区间上都连续，也称为在定义域内连续

6、反三角函数

(1)反三角函数值

①$\sin x=a,x\in[-\frac{p}{2},\frac{p}{2}]\Leftrightarrow\arcsin a=x$,②$\cos x=a,x\in[0,p]\Leftrightarrow\arccos a=x$

③ $\tan x=a,x\in(-\frac{p}{2},\frac{p}{2})\Leftrightarrow\arctan a=x$ ④$\cot x=a,x\in(0,p)\Leftrightarrow\operatorname{arc}\cot a=x$

(2)反三角 $\arcsin a$ 的四个特性

①表示$[-\frac{p}{2},\frac{p}{2}]$上的一个角 $a$ ,并且角 $a$ 的正弦等于 $a$

②表示正弦运算的逆运算

③表示方程 $\sin x=a$ 在$[-\frac{p}{2},\frac{p}{2}]$上的解

④表示 $y=\sin x$ 与 $y=a$ 的交点的横坐标

其它的类似

例如

（1）$\arcsin\frac{1}{2}=\frac{p}{6}$　（2）$\arcsin(-\frac{1}{2})=-\frac{p}{6}$　（3）$\arccos\frac{1}{2}=\frac{p}{3}$

（4）$\arccos(-\frac{1}{2})=p-\frac{p}{3}=\frac{2p}{3}$，（5）$\arctan\sqrt{3}=\frac{p}{3}$　（6）$\arctan(-\sqrt{3})=-\frac{p}{3}$

（7）$\operatorname{arc}\cot\sqrt{3}=\frac{p}{6}$　（8）$\operatorname{arc}\cot(-\sqrt{3})=p-\frac{p}{6}=\frac{5p}{6}$

(3)反三角函数

① $y=sinx$ 在区间 $[-\frac{p}{2},\frac{p}{2}]$ 上反函数为 $y=\arcsin x$ 它的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[-\frac{p}{2},\frac{p}{2}]$，是增函数，奇函数。

② $y=\cos x$ 在区间 $[0,p]$ 上反函数为 $y=\arccos x$ 它的定义域是 $[-1,1]$，值域是 $[0,p]$，是减函数。

③ $y=\tan x$ 在区间 $(-\frac{p}{2},\frac{p}{2})$ 上反函数为 $y=\arctan x$ 它的定义域是 R，值域是 $(-\frac{p}{2},\frac{p}{2})$，是增函数，奇函数。

④ $y=\cot x$ 在区间 $(0,p)$ 上反函数为 $y=\mathrm{arc}\cot x$ 它的定义域是 R，值域是 $(0,p)$，是减函数。

由反函数的连续性知，$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$，$y=\arctan x$，$y=\mathrm{arc}\cot x$ 在定义域内都连续

7、双曲函数

（1）双曲正弦 $shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 定义域是 R，值域是 R,在 R 上递增，奇函数

(2)双曲余弦 $chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 定义域是 R，值域是 $[1,+\infty)$ ,偶函数

(3) 双曲正切 $th\ x=\frac{sh\ x}{ch\ x}$ ,双曲余切 $cth\ x = \frac{ch\ x}{sh\ x}$ ,

双曲正割 $sch\ x = \frac{1}{chx}$，双曲余割 $xhx = \frac{1}{shx}$

由因为 $y=e^x, y=e^{-x}=(\frac{1}{e})^x$ 连续，由连续的四则运算法则知它们在定义域内连续。

8、初等函数：常函数，幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数叫做基本初等函数。由基本初等函数经过有限次四则运算及复合运算得到的函数统称为初等函数。

9、由上面的讨论可得：一切初等函数在其定义域内都连续。

10、根据函数连续性的定义知：函数 $f(x)$在点 $x=x_0$ 连续，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，

例、利用初等函数的连续性求下列极限.

(1) $\lim\limits_{x\to 10}(lg^2x+3lgx+4)$；(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^x}{1+e^x}$，(3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}$ (4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$

解：(1) $\lim\limits_{x\to 10}(lg^2x+3lgx+4)=lg^2 10+3lg10+4=8$；

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-e^x}{1+e^x}=\frac{1-e^0}{1+e^0}=0$ (3) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x+1}=\frac{3}{2}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$

## 四、几个定理

1、最值定理：如果 $f(x)$是闭区间［$a$，$b$］上的连续函数，那么 $f(x)$在闭区间［$a$，$b$］上有最大值和最小值

2、介值定理：如果 $f(x)$是闭区间［$a$，$b$］上的连续函数，且 $f(a)<f(b)$(或 $f(a)>f(b)$)，

是介于 $f(a)<m<f(b)(或f(b)<m<f(a))$，则 $\exists x_0\in(a,b)$ 之间的数，

使 $f(x_0)=m$

3、零点定理：函数 $y=f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 的图象连续，并且 $f(a)f(b)<0$，那么函数

$y=f(x)$ 在 $(a,b)$ 必有零点。它介值定理的推论