第三节　泰勒公式

1、泰勒公式：如果 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有 $n+1$ 阶的导数，

则对任一 $x, x_0 \in (a,b)$，有 $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$

$+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$，其中 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$（$\xi$ 介于 x_0 于 x 之间），

称为拉格朗日型余项；或 $R_n(x)=o[(x-x_0)^n]$，称为皮亚诺型余项。

证明：设 $F(t)=f(x)-[f(t)+f'(t)(x-t)+\dfrac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n]$

$G(t)=(x-t)^{n+1}$

不妨设 $x_0<x$，则 $F(t)$ 与 $G(t)$ 在 $[x_0,x]$ 上连续，在 (x_0,x) 内可导，且

$F'(t)=\dfrac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}(x-t)^n$，$G'(t)=-(n+1)(x-t)^n\neq 0$

又因 $F(x)=G(x)=0$，所以由柯西中值定理得

$\dfrac{F(x_0)}{G(x_0)}=\dfrac{F(x_0)-F(x)}{G(x_0)-G(x)}=\dfrac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$，其中 $\xi\in(x_0,x)\subset(a,b)$

因为

$F(x_0)=f(x)-[f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\dfrac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n]$

$G(x_0)=(x-x_0)^{n+1}$

所以

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

当 n=0 时，$f(x)=f(x_0)+f'(\xi)(x-x_0)$

当 $x_0=0$ 时，$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\dfrac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}(0<\theta<1)$

这个公式叫麦克劳林公式

2、常用的初等函数的麦克劳林公式：1）$e^x=1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$

2）$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$

3）$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$

4）$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$

5）$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + o(x^n)$

6）$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$

例 1.按 $(x-1)$ 的幂展开多项式 $f(x) = x^4 + 3x^2 + 4$

解：$f'(x) = 4x^3 + 6x$，$f'(1) = 10$；$f''(x) = 12x^2 + 6$，$f''(1) = 18$；

$f'''(x) = 24x$，$f'''(1) = 24$；$f^{(4)}(x) = 24$；$f^{(4)}(1) = 24$；$f^{(5)}(x) = 0$；

将以上结果代入泰勒公式，得

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4$$

$$= 8 + 10(x-1) + 9(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + (x-1)^4。$$

例 2.求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 按 $(x-4)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的三阶泰勒公式。

解：$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$，$f'(4) = \frac{1}{4}$；$f''(x) = -\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}$，$f''(4) = -\frac{1}{32}$；

$f'''(x) = \frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}$，$f'''(4) = \frac{3}{256}$；$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}x^{-\frac{7}{2}}$；将以上结果代入泰勒公式，得

$$f(x) = f(4) + \frac{f'(4)}{1!}(x-4) + \frac{f''(4)}{2!}(x-4)^2 + \frac{f'''(4)}{3!}(x-4)^3 + \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}(x-4)^4$$

$= 2 + \frac{1}{4}(x-4) - \frac{1}{64}(x-4)^2 + \frac{1}{512}(x-4)^3 - \frac{5}{128\xi^{\frac{7}{2}}}(x-4)^4$，（$\xi$ 介于 x 与 4 之间）。

例 3、把 $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ 在 $x=0$ 点展开到含 x^4 项，并求 $f^{(3)}(0)$。

解：$f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2} = \frac{1-x+x^2+2x}{1-x+x^2} = 1 + \frac{2x}{1-x+x^2} = 1 + 2x(1+x)\frac{1}{1+x^3}$

$=1+2x(1+x)(1-x^3+o(x^3))=1+2x+2x^2-2x^4+o(x^4)$；

又由泰勒公式知 x^3 前的系数 $\dfrac{f'''(0)}{3!}=0$，从而 $f'''(0)=0$。

例 4．求函数 $f(x)=\ln x$ 按 $(x-2)$ 的幂展开的带有皮亚诺型余项的 n 阶泰勒公式。

思路：直接展开法，解法同 1；或者间接展开法，$f(x)$ 为对数函数时，通常利用已知的结论

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$$。

方法一：（直接展开）$f'(x)=\dfrac{1}{x}$，$f'(2)=\dfrac{1}{2}$；$f''(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，$f''(2)=-\dfrac{1}{4}$；

$f'''(x)=\dfrac{2}{x^3}$，$f'''(2)=\dfrac{1}{4}$；$\cdots, f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{x^n}$，$f^{(n)}(2)=(-1)^{n-1}\dfrac{(n-1)!}{2^n}$；

将以上结果代入泰勒公式，得

$$\ln x=f(2)+\frac{f'(2)}{1!}(x-2)+\frac{f''(2)}{2!}(x-2)^2+\frac{f'''(2)}{3!}(x-2)^3+\frac{f^{(4)}(2)}{4!}(x-2)^4+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(2)}{n!}(x-2)^n+o((x-2)^n)=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2^3}(x-2)^2+\frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3-\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o((x-2)^n)$$。

方法二：$f(x)=\ln x=\ln(2+x-2)=\ln 2+\ln(1+\dfrac{x-2}{2})=\ln 2+\dfrac{x-2}{2}-\dfrac{1}{2}(\dfrac{x-2}{2})^2$

$$+\frac{1}{3}(\frac{x-2}{2})^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}(\frac{x-2}{2})^n+o((\frac{x-2}{2})^n)=\ln 2+\frac{1}{2}(x-2)-\frac{1}{2^3}(x-2)^2$$

$$+\frac{1}{3\cdot 2^3}(x-2)^3-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n\cdot 2^n}(x-2)^n+o((x-2)^n)$$。

例 5．求函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 按 $(x+1)$ 的幂展开的带有拉格朗日型余项的 n 阶泰勒公式。

知识点：泰勒公式。

思路：直接展开法，解法同 1；或者间接展开法，$f(x)$ 为有理分式时通常利用已知的结论

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\frac{1}{(1-x)^{n+2}}x^{n+1}$$。

方法一：$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$，$f'(-1)=-1$；$f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$，$f''(-1)=-2$；$f'''(x)=-\dfrac{6}{x^4}$，

$f'''(-1)=-6\ \cdots, f^{(n)}(x)=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$，$f^{(n)}(-1)=(-1)^n\dfrac{n!}{(-1)^{n+1}}=-n!$；

将以上结果代入泰勒公式，得

$$\frac{1}{x}=f(-1)+\frac{f'(-1)}{1!}(x+1)+\frac{f''(-1)}{2!}(x+1)^2+\frac{f'''(-1)}{3!}(x+1)^3+\cdots$$

$$+\frac{f^{(n)}(-1)}{n!}(x+1)^n+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x+1)^{n+1}$$

$=-1-(x+1)-(x+1)^2-(x+1)^3-\cdots-(x+1)^n+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}$（$\xi$ 介于 x 与 -1 之间）。

方法二：$\dfrac{1}{x}=-\dfrac{1}{1-(x+1)}=-[1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^n$

$+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}]=-1-(x+1)-(x+1)^2-(x+1)^3-\cdots-(x+1)^n+\dfrac{(-1)^{n+1}}{\xi^{n+2}}(x+1)^{n+1}$

（ξ 介于 x 与 -1 之间）。

例 6．验证当 $0<x\le\dfrac{1}{2}$ 时，按公式 $e^x\approx 1+x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}$ 计算 e^x 的近似值时，所产生的误差小于 0.01，并求 $\sqrt{e}$ 的近似值，使误差小于 0.01。

解：$|R_3(x)|=\left|\dfrac{e^{\xi}}{4!}x^4\right|\le\left|\dfrac{e^{\frac{1}{2}}}{4!}x^4\right|\le\left|\dfrac{2}{4!}\dfrac{1}{2^4}\right|=\dfrac{1}{192}<0.01$；$\sqrt{e}\approx 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{48}\approx 0.646$。

例 7．用泰勒公式取 $n=5$，求 $\ln 1.2$ 的近似值，并估计其误差。

解：设 $f(x)=\ln(1+x)$，则 $f(x)\approx f(0)+\dfrac{f'(0)}{1!}x+\dfrac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\dfrac{f^{(5)}(0)}{5!}x^5$

$=x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+\dfrac{x^5}{5}$，从而 $\ln 1.2=f(0.2)\approx 0.2-\dfrac{0.2^2}{2}+\dfrac{0.2^3}{3}-\dfrac{0.2^4}{4}+\dfrac{0.2^5}{5}\approx 0.1823$；

其误差为：$|R_5(x)|=\left|-\dfrac{1}{6(1+\xi)^6}x^6\right|\le\dfrac{0.2^6}{6}\approx 0.0000107$。

例 8．利用函数的泰勒展开式求下列极限：

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-x})$；　　（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}$。

解：（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+3x}-\sqrt{x^2-x})=\lim\limits_{x\to+\infty}[x(1+\dfrac{3}{x^2})^{\frac{1}{3}}-x(1-\dfrac{1}{x})^{\frac{1}{2}}]$

$$=\lim_{x\to+\infty}[x(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x^2}+o(\frac{1}{x^2}))]-x(1+\frac{1}{2}\cdot(-\frac{1}{x})+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+o(\frac{1}{x^2}))]$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\frac{1}{2}+\frac{9}{8x}+o(\frac{1}{x}))=\frac{1}{2}。$$

（2）$\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-\sqrt{1+x^2}}{(\cos x-e^{x^2})\sin x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}{(\cos x-e^{x^2})x^2}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\frac{1}{2}x^2-(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2})x^4+o(x^4))}{(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)-(1+x^2+o(x^2)))x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{8}x^4+o(x^4)}{-\frac{3x^4}{2}+o(x^4)}=-\frac{1}{12}。$$

例 9. 设 $x>0$，证明：$x-\frac{x^2}{2}<\ln(1+x)$。

解：$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+\xi)^3}$（$\xi$ 介于 0 与 x 之间），∵ $x>0$，∴ $\frac{x^3}{3(1+\xi)^3}>0$，

从而 $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+\xi)^3}>x-\frac{x^2}{2}$，结论成立。

例 10. 证明函数 $f(x)$ 是 n 次多项式的充要条件是 $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$。

解：必要性。易知，若 $f(x)$ 是 n 次多项式，则有 $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$。

充分性。∵ $f^{(n+1)}(x)\equiv 0$，∴ $f(x)$ 的 n 阶麦克劳林公式为：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}$$

$$+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+\frac{f^{(n+1)}(\xi)x^{n+1}}{(n+1)!}=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}$$

$+\frac{f'''(0)x^3}{3!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$，即 $f(x)$ 是 n 次多项式，结论成立。