第二节　中值定理与导数的应用

一、基础定理

1、最值定理：若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 有最大值与最小值

2、介值定理：若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)\neq f(b)$，则对任意的实数 m，当 $f(a)<m<f(b)$ 或 $f(b)<m<f(a)$ 时，则总存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=m$

3、零点定理：若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，$f(a)f(b)<0$，则存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使 $f(\xi)=0$

4、值域定理：若函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续最大值与最小值分别为 M 与 m(m<M)，对任意的 $m\le m\le M$，则存在一点 $\xi\in[a,b]$ 使 $f(\xi)=m$，即 $y=f(x)$ 的值域是 $[m,M]$

5、费马定理：若 x_0 是 $f(x)$ 的极值点，且 $f(x)$ 在 x_0 的邻域可导，则 $f'(x_0)=0$

二、中值定理

1、罗尔中值定理：函数 $y=f(x)$：（1）在 $[a,b]$ 上连续；（2）在 (a,b) 内可导；（3）$f(a)=f(b)$

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$

证明：因 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，故存在最大值 M 与最小值 m

当 M=m 时，则 $y=f(x)$ 是常函数，$f(x)=m$，于是命题立。

当 m<M 时，由于 $f(a)=f(b)$，于是 m，M 至少一个在区间 (a,b) 内的某点 x 取得，从而 x 是 $f(x)$ 的极值点，由 $f(x)$ 在 (a,b) 内可导，得 $f'(x)=0$，于是命题立。

2、拉格朗日中值定理：函数 $y=f(x)$：（1）在 $[a,b]$ 上连续；（2）在 (a,b) 内可导，则至少存在一点 $x\in(\mathrm{a},\mathrm{b})$ 使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

证明：设 $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$，则 $g(x)$ 满足罗尔中值定理的三个条件

于是至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $g'(\xi)=f'(\xi)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$，即 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

3、柯西中值定理：$f(x)$、$g(x)$：（1）在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导；（2）在 (a,b) 内每点处 $g'(x)\neq 0$

则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$

证明：设 $T(x)=f(x)-f(a)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a))$

则 $T(x)$ 满足罗尔中值定理的三个条件，于是至少存在一点 $\xi\in(a,b)$ 使得

$$T'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(\xi)=0,\text{于是}\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

例 1. 已知函数 $f(x)=x^4$ 在区间 $[1,2]$ 上满足拉格朗日中值定理的条件，试求满足定理的 ξ。

解：要使 $f'(\xi)=\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$，只要 $4\xi^3=15\Rightarrow x=\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}$，从而 $\xi=\sqrt[3]{\dfrac{15}{4}}\in(1,2)$ 即为满足定理的 x。

例 2.试证明对函数 $y=px^2+qx+r$ 应用拉格朗日中值定理时所求得的点 ξ 总是位于区间的正中间。

证明：不妨设所讨论的区间为 $[a,b]$，则函数 $y=px^2+qx+r$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，从而有 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$，即 $2\xi+q=\dfrac{(pb^2+qb+r)-(pa^2+qa+r)}{b-a}$，

解得 $\xi=\dfrac{b+a}{2}$，结论成立。

例 3.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(1)=0$。求证：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=-\dfrac{f(\xi)}{\xi}$。

要使 $f'(x)=-\dfrac{f(x)}{x}$，只要

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{x}\Leftrightarrow[\ln f(x)]'=-[\ln x]'\Leftrightarrow[\ln xf(x)]'=0\Leftrightarrow\frac{[xf(x)]'}{xf(x)}=0\Leftarrow[xf(x)]'=0$$

$\therefore$ 只要设辅助函数 $F(x)=xf(x)$

例 4、不用求出函数 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 的导数，说明方程 $f'(x)=0$ 有几个实根，并指出它们所在的区间。

解： $\because$ $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ 在 $[1,2]$、$[2,3]$、$[3,4]$ 上连续，

在 $(1,2)$、$(2,3)$、$(3,4)$ 内可导，且 $f(1)=f(2)=f(3)=f(4)=0$，

$\therefore$ 由罗尔中值定理，至少有一点 $\xi_1\in(1,2)$、$\xi_2\in(2,3)$、$\xi_3\in(3,4)$，

使得 $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=f'(\xi_3)=0$，即方程 $f'(x)=0$ 至少有三个实根，

又方程 $f'(x)=0$ 为三次方程，至多有三个实根，

$\therefore$ $f'(x)=0$ 有 3 个实根，分别为 $\xi_1\in(1,2)$、$\xi_2\in(2,3)$、$\xi_3\in(3,4)$。

例 5.证明下列不等式：

（1） $|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|$ ；　　　（2） 当 $x>1$ 时，$e^x>ex$ ；

（3） 设 $x>0$，证明 $\ln(1+x)<x$；　　　（4） 当 $x>0$ 时，$\ln(1+\frac{1}{x})>\frac{1}{1+x}$。

证明：（1）令 $f(x)=\arctan x$， $\because$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，

$\therefore$ 由拉格朗日中值定理，得 $|\arctan a-\arctan b|=|f'(\xi)(b-a)|=\left|\frac{1}{1+\xi^2}\right||b-a|\le|b-a|$。

（2）令 $f(x)=e^x\ (x>1)$，$\because$ $f(x)$ 在 $[1,x]$ 上连续，在 $(1,x)$ 内可导，

$\therefore$ 由拉格朗日中值定理，得 $e^x-e\ =e^{\xi}(x-1)$，$1<\xi<x$

$\therefore$ $e^x-e=e^{\xi}(x-1)>e(x-1)=ex-e$，从而当 $x>1$ 时，$e^x>ex$。

（3）令 $f(x)=\ln(1+x)\ (x>0)$，$\because$ $f(x)$ 在 $[0,x]$ 上连续，在 $(0,x)$ 内可导，

$\therefore$ 由拉格朗日中值定理，得 $\ln(1+x)=\ln(1+x)-\ln(1+0)=f'(\xi)(x-0)=\frac{1}{1+\xi}x$，

$0<\xi<x$

$\therefore$ $\frac{1}{1+\xi}x<x$，即 $x>0$， $\ln(1+x)<x$。

（4）令 $f(x)=\ln x\ (x>0)$，$\because$ $f(x)$ 在 $[x,1+x]$ 上连续，在 $(x,1+x)$ 内可导，

$\therefore$ 由拉格朗日中值定理，得 $\ln(1+\frac{1}{x})=\ln(1+x)-\ln x=f'(\xi)(1-0)=\frac{1}{\xi}$， $x<\xi<1+x$

$\therefore$ $\frac{1}{\xi}>\frac{1}{1+x}$，即当 $x>0$ 时，$\ln(1+\frac{1}{x})>\frac{1}{1+x}$。

例 6、求证 $2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi(x\ge1)$.

知识点： $f'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=C$（$C$ 为常数）。

思路：证明一个函数表达式 $f(x)$ 恒等于一个常数，只要证 $f'(x)=0$

证明：令 $f(x)=2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}(x\ge1)$，

当 $x=1$ 时，有 $2\arctan1+\arcsin1=\pi$；当 $x>1$ 时，有

$$f'(x)=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{\sqrt{1-(\frac{2x}{1+x^2})^2}}\cdot\frac{2(1+x^2)-2x\cdot2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}+\frac{1}{|1-x^2|}\cdot\frac{2-2x^2}{(1+x^2)}$$

$$=\frac{2}{1+x^2}+(-\frac{2}{1+x^2})=0，\therefore f(x)=C=f(1)=\pi；$$

$\therefore 2\arctan x+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}=\pi(x\geq 1)$ 成立。

例 7. 证明：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足关系式 $f'(x)=f(x)$，且 $f(0)=1$，则 $f(x)=e^x$。

知识点： $f'(x)=0\Leftrightarrow f(x)=C$

思路： 因为 $f(x)=e^x\Leftrightarrow e^{-x}f(x)\equiv 1$，所以当设 $F(x)=e^{-x}f(x)$ 时，只要证 $F'(x)=0$ 即可

证明： 构造辅助函数 $F(x)=e^{-x}f(x)$，则 $F'(x)=e^{-x}f'(x)-e^{-x}f(x)=0$；

$\therefore F(x)=e^{-x}f(x)\equiv C=F(0)=1\ \therefore f(x)=e^x$。

例 8. 设函数 $y=f(x)$ 在 $x=0$ 的某个邻域内具有 n 阶导数，且

$$f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0,\text{试用柯西中值定理证明：}$$

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}(0<\theta<1)。$$

证明： $\because f(x)$、$g(x)=x^n$ 及其各阶导数在 $[0,x]$ 上连续，在 $(0,x)$ 上可导，

且在 $(0,x)$ 每一点处，$g^{(n-1)}(x)=n!x\neq 0$，又 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0,$，

$\therefore$ 连续使用 n 次柯西中值定理得，

$$\frac{f(x)}{x^n}=\frac{f(x)-f(0)}{x^n-g(0)}=\frac{f'(x_1)}{nx_1^{n-1}}=\frac{f'(\xi_1)-f'(0)}{n\xi_1^{n-1}-g'(0)}=\frac{f''(x_2)}{n(n-1)x_2^{n-2}}=\frac{f^{(2)}(\xi_2)-f^{(2)}(0)}{n(n-1)x_2^{n-2}-g^{(2)}(0)}$$

$$\cdots=\frac{f^{(n-1)}(\xi_{n-1})-f^{(n-1)}(0)}{n!\xi_{n-1}-g^{(n-1)}(0)}=\frac{f^{(n)}(\theta x)}{n!}(0<\theta<1)$$

三、洛必达法则

1、$\frac{0}{0}$ 型不定式：若函数 f 和 g 满足

(1) $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$ (2) 在点 x_0 的某空心邻域 $U^0(x_0)$ 内两者都可导，且 $g'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=A$

证明：补充定义 $f(x_0)=g(x_0)=0$，使得 f 和 g 在点 x_0 处连续。任取 $x\in U^0(x_0)$，在区间 $[x_0,x]$（或 $[x,x_0]$）上应用柯西中值定理，有 $\frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$（$x$ 介于 x_0 与 x 之间）

即 $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$，于是 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$

2、$\dfrac{\infty}{\infty}$ 型不定式：若函数 f 和 g 满足

(1) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} g(x)=\infty$ (2)在点 x_0 的某右邻域 $U_+(x_0)$ 内两者都可导，且 $g'(x)\neq 0$

(3) $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$

证明：先设 A 为有限实数，由 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$，对任给正数 ε，存在 $x_1\in U_+(x_0)$，对满足 $x_0<x<x_1$ 的每个 x 有 $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)}-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ (4)

由条件(2)，f 和 g 在区间 $[x,x_1]$ 上满足柯西中值定理条件，故存在 $\xi\in(x,x_1)\subset(x_0,x_1)$ 使得

$\dfrac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}=\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$ 代入(4)得 $\left|\dfrac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}-A\right|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ (5)

另一方面 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-\dfrac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|=\left|\dfrac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|=\left|\dfrac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\right|\left|\dfrac{\dfrac{g(x_1)}{g(x)}-1}{\dfrac{f(x_1)}{f(x)}-1}\right|$ （6）

由条件(1)及(5)知当 $x\to x_0^+$ 时 $\left|\dfrac{\dfrac{g(x_1)}{g(x)}-1}{\dfrac{f(x_1)}{f(x)}-1}\right|\to 0$，$\dfrac{f(x_1)-f(x)}{g(x_1)-g(x)}\to A$

因此存在正数 δ，使得当 $x_0<x<x_0+\delta$ 的 x，有 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}-A\right|<\varepsilon$，于是 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A$

类似地可证明 $A=\pm\infty$ 或 ∞ 的情形

例用洛必达法则求下列极限：

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$；（2） $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x\text{-}a}$；（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{arc\cot x}$；

（4） $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)$；（5） $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$；（6） $\lim\limits_{x\to 0^+}(\ln\dfrac{1}{x})^x$；

解：（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2$；

（2） $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x}{1}=\cos a$；

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x})}{arc\cot x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{x(x+1)}}{-\dfrac{1}{1+x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{x(x+1)}=1$；

（4） $\lim\limits_{x\to\infty}x(e^{\frac{1}{x}}-1)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}-1)}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$；

（5） $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{x}}=\lim\limits_{x\to0}e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x}{1+\sin x}}=e$；

（6） $\lim\limits_{x\to0^+}(\ln\dfrac{1}{x})^x=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\ln[-\ln x]}{\frac{1}{x}}}=e^{\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{-\ln x}\cdot(-\frac{1}{x})}{-\frac{1}{x^2}}}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x}{\ln x}}=e^{-\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{1/x}}=1$；