第二节 函数的极限

一、函数极限的意思

1． 当 $x\to\infty$ 时函数的极限：

引例 $f(x)=(\frac{1}{2})^x$ 当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to 0$，我们把 0 叫做 $f(x)$ 的**极限，记作** $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{1}{2})^x$ **=0**

（1）当 $x\to+\infty$ 时， $f(x)\to$ 常数A，**就说当** x **趋向于正无穷大时，函数** $y=f(x)$ **的极限是 A，记作：** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

引例 $f(x)=2^x$ 当 $x\to-\infty$ 时， $f(x)\to 0$，我们把 0 叫做 $f(x)$ **的极限，记作** $\lim\limits_{x\to-\infty}2^x$=0

（2）当 $x\to-\infty$ 时， $f(x)\to$ 常数A，**就说当** x **趋向于负无穷大时，函数** $y=f(x)$ **的极限是 A，记作：** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

也可以记作，当 $x\to-\infty$ 时， $f(x)\to A$

引例 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$， $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$

（3）**当** $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$，**且** $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$，**就说当** x **趋向于无穷大时，函数** $y=f(x)$ **的极限是 A，记作：** $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

例：写出下列函数的极限：

（1） $\lim\limits_{x\to-\infty}10^x$ （2）$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}$ （3）$\lim\limits_{x\to\infty}4$

2、 当 $x\to x_0$ 时函数的极限

引例 $y=\begin{cases}x+1(x>0)\\0\quad(x=0)\\x-1(x<0)\end{cases}$ 当 $x\to 0^+$ 时， $f(x)\to 1$，当 $x\to 0^-$ 时， $f(x)\to -1$

(1)函数的左右极限:

当 x 从 x_0 的左侧无限地**趋近于** x_0 时，函数 $f(x)$ **无限地趋近于常数** A，就说**函数** $y=f(x)$ **的左极限是 A，记作：** $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$

（2）当 x 从 x_0 的右侧无限地**趋近于** x_0 时，函数 $f(x)$ **无限地趋近于常数** A，就说**函数** $y=f(x)$ **的右极限是 A，记作：** $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$

引例 $f(x)=2x-3$， $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=1$， $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=1$

（3）**当** $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$， $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$ **时，就说当** x **趋向** x_0 **时，函数** $y=f(x)$ **的极限是 A，记作** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$。

例 1、若 $f(x)=\begin{cases}x+2(x\ge 0)\\x-1(x<0)\end{cases}$，求下列的极限

(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ （**2**）$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ **(3)**$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$（**4**）$\lim\limits_{x\to 1}f(x)$（**5**）$\lim\limits_{x\to -2}f(x)$

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+2)=2$ （**2**） $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$

(3)因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=2$， $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$ **所以** $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ **不存在**

(4) 因为 $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x+2)=3$， $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+2)=3$ **于是** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ **=3**

（5）$\lim\limits_{x\to -2} f(x)=\lim\limits_{x\to -2}(x-1)=-3$

例 2、当 X $\to 1$ 时，写出函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的极限

解：$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2,\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$，**于是**$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$

此题可直接书写成$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$

二、极限的运算

1、函数极限的运算法则： **如果**$\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=A,\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=B$，**那么**

$\lim\limits_{x\to x_o}[f(x)+g(x)]=A+B$ $\lim\limits_{x\to x_o}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$ $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}(B\neq 0)$

2、常用极限： $\lim\limits_{x\to x_o} x^k=x_o^k(k\in N^*),\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^k}=0(k\in N^*)$

例 1 求下列极限

(1)$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x)$ (2)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-x^2+1}{x+1}$ (3)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+3}{x^2+1}$

解：(1)$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+3x)=2^2+3\times 2=10$ (2)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3-x^2+1}{x+1}=\dfrac{2}{2}=1$

(3)$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-x+3}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x}+\dfrac{3}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x^2}}=3$

例 2 求下列极限

(1)$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}$ (2)$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^3-1}$

解：(1)$\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x+4)=8$ (2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-x}{x^3-1}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{3}$

三、函数的极限严格定义

定义 1：若函数 $f(x)$ 在 $(x_0-a,x_0)\mathbf{U}(x_0,x_0+a)(a>0)$ 上有定义，A 是常数;

若对于任意的 $e>0$,都存在 $d>0$，当 $0<|x-x_0|<d$ 时，都有 $|f(x)-A|<e$

则称常数 A 是 $f(x)$ 在 x_0 处的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

定义 2：若函数 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上有定义，A 是常数;

若对于任意的 $e>0$,都存在实数数 X，当 $x>X$ 时，都有 $|f(x)-A|<e$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$

定义 3：若函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,a)$ 上有定义，A 是常数;

若对于任意的 $e>0$,都存在数 X，当 $x<X$ 时，都有 $|f(x)-A|<e$,则 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$

例 1、用定义证明 $\lim\limits_{x\to 4} x^2=16$

证明：对任意的 $e>0$，要使 $|x^2-16|=|x+4||x-4|<e$ (*)

先令$|x-4|<1$,则$|x+4|=|x-4+8|\le|x-4|+8<9$，于是只要$|x-4|<\frac{e}{9}$就有(*)成立

因此取$d=\min\{1,\frac{e}{9}\}$，则当 $0<|x-4|<d$ 时，就有(*)成立

所以$\lim\limits_{x\to 4}x^2=16$

例 2、用定义证明$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x+1}=\frac{2}{3}$

证明：对任意的$e>0$，要使$|\frac{x}{x+1}-\frac{2}{3}|=|\frac{x-2}{3(x+1)}|<e$ (*)

先令$|x-2|<1$,则$|x+1|=|x-2+3|\ge 3-|x-2|>2$，于是只要$|x-2|<6e$就有(*)成立

因此取$d=\min\{1,6e\}$，则当 $0<|x-2|<d$ 时，就有(*)成立

所以$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x}{x+1}=\frac{2}{3}$

四、函数的极限的性质

1、极限的唯一性：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$=A, $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$=B，则 A=B

证明：对任意的$e>0$，由条件得

存在$d_1>0$，当$0<|x-x_0|<d_1$时，都有$|f(x)-A|<\frac{e}{2}$

存在$d_2>0$，当$0<|x-x_0|<d_2$时，都有$|f(x)-B|<\frac{e}{2}$

因此取$d=\min\{d_1,d_2\}$,当$0<|x-x_0|<d$时，

$$|A-B|=|[f(x)-B]-[f(x)-A]|\le|f(x)-B|+|f(x)-A|<\frac{e}{2}+\frac{e}{2}=e$$

由于e可以是任意小的正数，于是 A=B

2、可取绝对值：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$=A,则$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|\mathrm{A}|$

证明：对任意的$e>0$，由条件得

存在$d>0$，当$0<|x-x_0|<d$时，都有$|f(x)-A|<e$

于是$||f(x)|-|A||\le|f(x)-A|<e$，故$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|\mathrm{A}|$

3、局部保序性：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$=A, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$=B,A>B,

则存在$d>0$，当$0<|x-x_0|<d$时， $f(x)>g(x)$

证明：对于$e=\frac{A-B}{2}>0$,

存在$d_1>0$，当$0<|x-x_0|<d_1$时，都有$|f(x)-A|<\frac{A-B}{2}$①

存在$d_2>0$，当$0<|x-x_0|<d_2$时，都有$|f(x)-B|<\frac{A-B}{2}$②

取$d=\min\{d_1,d_2\}$,当$0<|x-x_0|<d$时，①②同时成立

于是 $f(x)>\frac{A+B}{2},g(x)<\frac{A+B}{2}$，故 $f(x)>g(x)$

推论 1：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$=A≠0,则存在$d>0$，当$0<|x-x_0|<d$时，$|f(x)|>\frac{|\mathrm{A}|}{2}$

证明：因 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=A，故 $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|=|\mathrm{A}|$，又 $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{|\mathrm{A}|}{2}=\frac{|\mathrm{A}|}{2}$，$|\mathrm{A}|>\frac{|\mathrm{A}|}{2}$

于是存在 $d>0$，当 $0<|x-x_0|<d$ 时，$|f(x)|>\frac{|\mathrm{A}|}{2}$

推论 2 局部有界性：若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=A，则存在 $d>0$，当 $0<|x-x_0|<d$ 时，$f(x)$ 有界

证明：取常数 m，M 使 m<A<M，$\lim\limits_{x\to x_0} m=m$，$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$=A，$\lim\limits_{x\to x_0} M=M$，

于是存在 $d_1>0$，当 $0<|x-x_0|<d_1$ 时，都有 $f(x)>m$ ①

存在 $d_2>0$，当 $0<|x-x_0|<d_2$ 时，都有 $f(x)<M$ ②

取 $d=\min\{d_1,d_2\}$，当 $0<|x-x_0|<d$ 时，①②同时成立

即 $m<f(x)<M$，取 Q=$\max\{|m|,|M|\}$，则 $|f(x)|<Q$

4、夹值性：若存在 $r>0$，当 $0<|x-x_0|<d$ 时 $g(x)\le f(x)\le h(x)$，

且 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

证明：对任意的 $e>0$，由条件得

存在 $d_1>0$，当 $0<|x-x_0|<d_1$ 时，都有 $|\mathrm{g}(x)-A|<e$ ①

存在 $d_2>0$，当 $0<|x-x_0|<d_2$ 时，都有 $|h(x)-A|<e$ ②

因此取 $d=\min\{d_1,d_2\}$，当 $0<|x-x_0|<d$ 时，①②同时成立

于是 $f(x)\ge g(x)>A-e,\ f(x)\le h(x)<A+e$

即 $|f(x)-A|<e$，故 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$

5、函数极限的运算法则：如果 $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=A, \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=B$，那么

(1) $\lim\limits_{x\to x_o}[a\,f(x)+b\,g(x)]=a\,A+b\,B$ **(** a, b 是不全为零的常数 **)**

(2) $\lim\limits_{x\to x_o}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$ **(3)** $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B}(B\ne 0)$

证明：对任意的 $e>0$，由条件得

存在 $d_1>0$，当 $0<|x-x_0|<d_1$ 时，都有 $|f(x)-A|<e$ ①

存在 $d_2>0$，当 $0<|x-x_0|<d_2$ 时，都有 $|g(x)-B|<e$ ②

因此取 $d=\min\{d_1,d_2\}$，当 $0<|x-x_0|<d$ 时，①②同时成立

于是 $|a\,f(x)+b\,g(x)-a\,A-b\,B|\le|a\,f(x)-a\,A|+|b\,g(x)-b\,B|$
$=|a\,||\,f(x)-A|+|b\,||\,g(x)-B|<(|a|+|b|)e$

故 $\lim\limits_{x\to x_o}[a\,f(x)+b\,g(x)]=a\,A+b\,B$

因 $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=A$，故存在 $d_3>0$，当 $0<|x-x_0|<d_3$ 时，都有 $|f(x)|<Q$(Q 是一个正常数)

因此取 $d_4=\min\{d,d_3\}$，当 $0<|x-x_0|<d_4$ 时，

于是 $|f(x)g(x)-AB|=|f(x)(g(x)-B)+B(f(x)-A)|$
$\le|f(x)||g(x)-\mathrm{B}|+|\mathrm{B}||f(x)-A|<(\mathrm{Q}+\mathrm{B})e$

因此 $\lim\limits_{x\to x_o}[f(x)\cdot g(x)]=A\cdot B$

要证(3)只要证： $\lim\limits_{x\to x_o}\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{B}(B\ne 0)$ ③

因 $\lim\limits_{x\to x_o} g(x)=B$，故存在 $d_5>0$，当 $0<|x-x_0|<d_5$ 时，都有 $|g(x)|>\frac{|\mathrm{B}|}{2}$

于是$|\dfrac{1}{g(x)}-\dfrac{1}{B}|=\dfrac{|g(x)-B|}{|g(x)||B|}<\dfrac{2e}{B^2}$因此③成立，

于是$\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_o}[f(x)\times\dfrac{1}{g(x)}]=\dfrac{A}{B}$

6、$\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=A$的充要条件是：对任意满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0(x_n\neq x_0,n\in N^*)$的数列$\{x_n\}$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$

证明：先证必要性

由$\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=A$知，对于任意$e>0$，存在$d>0$，当$0<|x-x_0|<d$时，都有$|f(x)-A|<e$

由$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0(x_n\neq x_0,n\in N^*)$得，对上面的$d>0$，存在$N\in N^*$,当$x_n>N$时，有$0<|x_n-x_0|<d$，于是$|f(x_n)-A|<e$，因此$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$

再证充分性

已知对任意满足$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0(x_n\neq x_0,n\in N^*)$的数列$\{x_n\}$，都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$

假设$\lim\limits_{x\to x_o}f(x)\neq A$，则存在$e_0>0$，对任意$d>0$，存在满足$0<|x-x_0|<d$的 x，使$|f(x)-A|\geq e_0$

取$d=1$，存在满足$0<|x_1-x_0|<d$的x_1，使$|f(x_1)-A|\geq e_0$

取$d=\dfrac{1}{2}$，存在满足$0<|x_2-x_0|<d$的x_2，使$|f(x_2)-A|\geq e_0$

……

取$d=\dfrac{1}{n}$，存在满足$0<|x_n-x_0|<d$的x_n，使$|f(x_n)-A|\geq e_0$

……

于是得数列$\{x_n\}$，有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0(x_n\neq x_0,n\in N^*)$，但$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)\neq A$与①矛盾

于是$\lim\limits_{x\to x_o}f(x)=A$。　**证毕**

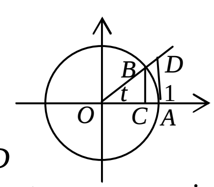
例、求证$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在

证明：取$x_n=\dfrac{1}{np}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin np=\lim\limits_{n\to\infty}0=0$

再取$x_n=\dfrac{1}{2np+\dfrac{p}{2}}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sin\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin(2np+\dfrac{p}{2})=\lim\limits_{n\to\infty}1=1$

由于$0\neq 1$，因此$\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$不存在

五、两个重要极限



1、求证：$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

证明：设角t是很小的正数，由单位圆知$BC<$弧长$AB<AD$

则$\sin t<t<\tan t,1<\dfrac{t}{\sin t}<\dfrac{1}{\cos t}$，$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{1}{\cos t}=1$，于是$\lim\limits_{t\to 0^+}\dfrac{t}{\sin t}=1$，$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

当角t是绝对值很小的负数时$\lim\limits_{t\to 0^-}\dfrac{t}{\sin t}=\lim\limits_{-t\to 0^+}\dfrac{-t}{\sin(-t)}=1$,于是$\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sin t}{t}=1$

2、求证：$\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t=e$

证明：$(1+\frac{1}{[t]+1})^{[t]}\le(1+\frac{1}{t})^t\le(1+\frac{1}{[t]})^{[t]+1}$，其中$[t]$是不大于t的最大整数

由于$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n+1})^n=e$ ，$\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^{n+1}=e$，故$\lim\limits_{t\to+\infty}(1+\frac{1}{t})^t=e$

再证$\lim\limits_{t\to-\infty}(1+\frac{1}{t})^t=e$，令$x=-t$，则$(1+\frac{1}{t})^t=(1-\frac{1}{x})^{-x}=(\frac{x}{x-1})^x=(1+\frac{1}{x-1})^x$

$\lim\limits_{t\to-\infty}(1+\frac{1}{t})^t=\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x-1})^{x-1}(1+\frac{1}{x-1})=e$

综上$\lim\limits_{t\to\infty}(1+\frac{1}{t})^t=e$，令$\frac{1}{t}=x$可得$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

例、求极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}$

解：(1) $\lim\limits_{t\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{t\to0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2$　　(2) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}[(1+3x)^{\frac{1}{3x}}]^3=e^3$

六、无穷小

1、无穷小：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称当$x\to x_0$时，$f(x)$是无穷小

例 1、当$x\to0$时，　$x,x^2,x^{\frac{1}{2}}$都是无穷小.

例 2、当$x\to0$时，　$\sin x,\tan x,1-\cos x,\ln(1+x),\sqrt[n]{1+x}-1$都是无穷小.

例 3、当$x\to1$时，　$x^2-1,\sqrt[n]{x}-1$都是无穷小.

2、等价无穷小：若当$x\to x_0$时，$f(x),g(x)$都是无穷小，且$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$

则称$f(x),g(x)$是等价无穷小记作$f(x)\sim g(x)$

例 1、由于$\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$，因此当$x\to0$时，$\sin x\sim x$

例 2、由于$\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}=\ln e=1$，因此当$x\to0$时$\ln(1+x)\sim x$

例 3、求证：当$x\to0$时，$e^x-1\sim x$

证明：设$y=e^x-1$，则当$x\to0$时，$y\to0$，且$x=\ln(1+y)$，

故$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{y\to0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1$，于是$e^x-1\sim x$

例 4、由于$\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}$，因此当$x\to0$时$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$

例 5、求证：当$x\to0$时，$(1+x)^a-1\sim ax$

证明：设$y=(1+x)^a-1$则当$x\to0$时，$y\to0$

　于是

$$\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^a-1}{\ln(1+x)^a}\cdot\frac{\ln(1+x)^a}{x}=\lim_{x\to0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{a\ln(1+x)}{x}=a$$

因此$(1+x)^{a}-1\sim ax$

3、定理：设$f(x),g(x),h(x)$在x_0的一个去心邻域有定义，当$x\to x_0$时$f(x)\sim g(x)$，则若$\lim\limits_{x\to 0}h(x)f(x)=\text{A},\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{f(x)}=B,$则$\lim\limits_{x\to 0}h(x)g(x)=\text{A},\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{g(x)}=B$

证明：$\lim\limits_{x\to 0}h(x)g(x)=\lim\limits_{x\to 0}[h(x)f(x)\times\frac{g(x)}{f(x)}]=\text{A}\times 1=\text{A},$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{h(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}[\frac{h(x)}{f(x)}\times\frac{f(x)}{g(x)}]=B\times 1=B$

用$\sin x\sim x$，$1-\cos x\sim 2x^2$，$1-\cos x\sim 2x^2$，$\tan x\sim x,\ \ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$，$(1+x)^{a}-1\sim ax$上面的定理就可求一些极限。

例、求极限　(1)$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-e^{\frac{x}{6}}}{\ln(1+3\text{x})}$　(2)$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$

解：(1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+1}-e^{\frac{x}{6}}}{\ln(1+3\text{x})}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{x+1}-1)-(e^{\frac{x}{6}}-1)}{3\text{x}}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}x}{3\text{x}}=\frac{1}{18}$

(2)$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}[1-(1-\cos x)]^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1-\frac{1}{2}x^2)^{-\frac{2}{x^2}}]^{-\frac{1}{2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

4、同阶无穷小：若当$x\to x_0$时，$f(x),g(x)$都是无穷小，且$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=$常数$A,A\neq 0$

则称$f(x),g(x)$是同阶无穷小

例、$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x^2}=2$，于是$1-\cos x$和$x^2$是同级无穷小。

注：等价无穷小是同级无穷小的特例

5、若当$x\to x_0$时，$f(x),g(x)$都是无穷小，且$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$，则称$f(x)$是关于$g(x)$的高级无穷小，记为$f(x)=o(g(x))$

例 1、由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^6}{x^4}=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$，因此当$x\to 0$时，$x^6$是关于$x^4$的高级无穷小，故$x^6=o(x^4)$

例 2、由于$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2 x}{x}=0$，于是$1-\cos x=o(x)$

例 3、若当$x\to x_0$时，$f(x),g(x)$是等价无穷小。

则$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}-1=1-1=0$，于是$f(x)-g(x)=o(g(x))$

即$f(x)=g(x)+o(g(x))$

七、无穷大与无穷小类似