第二节　　微分

1、微分：$y=f(x)$ 在点 x_0 处线的切线 $L(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$，给一个在 x_0 处的增量 Δx，　$\Delta L(x)=L(x_0+\Delta x)-L(x_0)=f'(x_0)\Delta x\ (*)$

当 $\Delta x\neq 0$时,记 $dx=\Delta x, df(x)=\Delta L(x)$，它们分别叫做 $y=f(x)$ 在 x_0 处的 x 与 $f(x)$ 的微分，代入$(*)$式得 $df(x)=f'(x_0)dx$。

$df(x)$ 的值由 x 的值与 dx 的值所决定。当 x 的固定了如 $x=x_0$，$df(x)$ 就是 dx 的正比例例函数，比例系数为 $f'(x_0)$。由于 $dx\neq 0$，于是 $f'(x_0)=\dfrac{df(x)}{dx}$。一般地 $\dfrac{df(x)}{dx}$ 可用来表示当 $x=x$ 时的导数 $\dfrac{df(x)}{dx}=f'(x)$，　$f'(x_0)$ 只是其一个值，　即 $f'(x_0)=\dfrac{df(x)}{dx}\Big|_{x=x_0}$

在没有特别说明时，$df(x)$ 用来表示 $y=f(x)$ 在 x 处的微分，于是 $df(x)=f'(x)dx$。引入了微分的概念后，我们就建立了可把 $df(x), dx, f'(x)$ 三者之间的运算。

2、初等函数的微分

(1) $dx^n=nx^{n-1}dx$　**(2)** $d\sin x=\cos x dx$　**(3)** $d\cos x=-\sin x dx$

(4) $d\ln x=\dfrac{1}{x}dx$　**(5)** $d\log_a x=\dfrac{dx}{x\ln a}$　　**(6)** $de^x=e^x dx$　**(7)** $da^x=a^x\ln a dx$

(8) $d\tan x=(\tan x)'dx=\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right)'dx=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\sec^2 x dx$

(8) $d\cot x=(\cot x)'dx=\left(\dfrac{\cos x}{\sin x}\right)'dx=\dfrac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}dx=-\csc^2 x dx$

(9) $d\sec x=(\sec x)'dx=\left(\dfrac{1}{\cos x}\right)'dx=-\dfrac{-\sin x}{\cos^2 x}dx=\sec x\tan x dx$

(10) $d\csc x=(\csc x)'dx=\left(\dfrac{1}{\sin x}\right)'dx=-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}dx=-\csc x\cot x dx$

(11)　设$y=\arctan x$,则$x=\tan y$，于是

$$d\arctan x=dy=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\times dx=\frac{1}{(\tan y)'_y}\times dx=\frac{dx}{\sec^2 y}=\frac{dx}{1+\tan^2 y}=\frac{dx}{1+x^2}$$

(12) 设$y=\arcsin x$，则 $x=\sin y$, 于是

$$d(\arcsin x)=dy=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\times dx=\frac{1}{(\sin y)'_y}\times dx=\frac{dx}{\cos y}=\frac{dx}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

3、复合函数的微分：设 $y=f(u),u=g(x)$，由复合函数的导数得 $f'(g(x))=f'(u)g'(x)$

于是$\frac{df(g(x))}{dx}=f'(u)g'(x)$，所以$df(g(x))=f'(u)g'(x)dx$

又$df(u)=f'(u)du=f'(u)g'(x)dx$

于是$df(g(x))=df(u)$,或$df(u)=df(g(x))$，这里$u=g(x)$。这就是微分的不变性。

即在函数的微分中，进行变量代换微分是不变的。

例、计算(1) $d\sin 2x$ (2) $d(2x+1)^{\frac{3}{2}}$ (3) $de^{3\sqrt{x}}$ (4) $d\ln|x|$

(5) $d\ln|1+2\ln x|$ (5) $d\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}$

解：(1) $d\sin 2x=\cos 2xd2x=2\cos 2xdx$

(2) $d(2x+1)^{\frac{3}{2}}=\frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}}d(2x+1)=3\sqrt{2x+1}dx$

(3) $de^{3\sqrt{x}}=e^{3\sqrt{x}}d3\sqrt{x}=\frac{3}{2\sqrt{x}}e^{3\sqrt{x}}dx$

(4)当 x>0 时，$d\ln|x|=d\ln x=\frac{dx}{x}$，

当 x<0 时，$d\ln|x|=d\ln(-x)=\frac{d(-x)}{-x}=\frac{dx}{x}$

综上$d\ln|x|=\frac{dx}{x}$

(5) $d\ln|1+2\ln x|=\frac{d(1+2\ln x)}{1+2\ln x}=\frac{2dx}{x(1+2\ln x)}$

(6) $d\arctan\frac{x+1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{(\frac{x+1}{\sqrt{2}})^2+1}d\frac{x+1}{\sqrt{2}}=\frac{dx}{x^2+2x+3}$