第五节　函数的极值与最大值最小值

1、极值的概念：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，若对该邻域内任意一点 x（$x \neq x_0$），恒有 $f(x) < f(x_0)$（或 $f(x) > f(x_0)$），则称 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极大值（或极小值），而 x_0 成为函数 $f(x)$ 的极大值点（或极小值点）。

2、函数极值的判别法

第一充分条件：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内连续且可导（$f'(x_0)$ 可以不存在），

（1）若在 x_0 的左邻域内，$f'(x) > 0$；在在 x_0 的右邻域内，$f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值 $f(x_0)$；

（2）若在 x_0 的左邻域内，$f'(x) < 0$；在在 x_0 的右邻域内，$f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值 $f(x_0)$；

（3）若在 x_0 的左邻域内，$f'(x)$ 不变号，则 $f(x)$ 在 x_0 处没有极值。

注：第一充分条件利用一阶导数符号判断函数单调性。

第二充分条件：设 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数，且 $f'(x_0) = 0$，$f''(x_0) \neq 0$，则

（1）当 $f''(x_0) < 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值；

（2）当 $f''(x_0) > 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值。

注：利用驻点处二阶导数符号判断驻点是否为极值点。

例 1.求下列函数的极值：

（1）　$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$；　（2）$y = x - \ln(1+x)$

解：（1）**方法一**：　$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$，

令 $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$，得 $x_1 = 3$，$x_2 = -1$；现列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	极大值点	↘	极小值点	↗

由上表知，$f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x$ 在 $x = -1$ 处取得极大值为 $f(-1) = \frac{5}{3}$，在 $x = 3$ 处取得极小值为 $f(3) = -9$。

方法二：令 $f'(x) = x^2 - 2x - 3 = 0$，得 $x_1 = 3$，$x_2 = -1$；

由 $f''(x)=2x-2$ 得，$f''(-1)=-4<0$，　$f''(3)=4>0$，

$\therefore$ 由极值的第二充分条件知，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x$ 在 $x=-1$ 处取得极大值为 $f(-1)=\dfrac{5}{3}$，

在 $x=3$ 处取得极小值为 $f(3)=-9$。

（2）**方法一**：$y=x-\ln(1+x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，令 $y'=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}=0$，得 $x=0$；

当 $-1<x<0$ 时，有 $y'<0$；当 $x>0$ 时，有 $y'>0$，

$\therefore$ 由极值的第一充分条件知，$y=x-\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值为 $f(0)=0$。

方法二：$y=x-\ln(1+x)$ 的定义域为 $(-1,+\infty)$，令 $y'=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}=0$，得 $x=0$；

又由 $y''=\dfrac{1}{(1+x)^2}$，得 $y''(0)=1>0$，

$\therefore$ 由极值的第二充分条件知，$y=x-\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值为 $f(0)=0$。

例 2、试问 a 为何值时，函数 $f(x)=a\sin x+\dfrac{1}{3}\sin 3x$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极值，并求出极值。

解：根据题意，得 $f'(x)\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=(a\cos x+\cos 3x)\Big|_{x=\frac{\pi}{3}}=a\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\pi=0$，

即 $\dfrac{a}{2}-1=0$，$a=2$；

由 $f''(x)=-2\sin x-3\sin 3x$，得 $f''(\dfrac{p}{3})=-\sqrt{3}<0$，

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{3}$ 处取得极大值 $f(\dfrac{\pi}{3})=\sqrt{3}$。