第四节 函数的单调性与曲线的凹凸性

1、函数单调性的判别法：设 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，则

（1）若在 (a,b) 内 $f'(x)>0$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调增加；

（2）若在 (a,b) 内 $f'(x)<0$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调减少。

2、曲线凹凸性的概念：设 $f(x)$ 在区间 I 内连续，如果对 I 上任意两点 x_1,x_2，恒有

$f(\frac{x_1+x_2}{2})<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是下凹的；如果恒有

$f(\frac{x_1+x_2}{2})>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$，则称 $f(x)$ 在 I 上的图形是上凸的。

3、拐点的概念：连续曲线上凹弧与凸弧的分界点成为曲线的拐点。

4、曲线凹凸性的判别法：设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内具有一阶和二阶导数，则

（1）若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凹的；

（2）若在 (a,b) 内 $f''(x)<0$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的图形是凸的。

例 1.求下列函数的单调区间：

（1） $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$（2） $y=2x^2-\ln x$

解：（1） $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$；令 $y'=x^2-2x-3=0$，

得 $x_1=-1$，$x_2=3$。列表讨论如下：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

由上表可知，$y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x+1$ 在 $(-\infty,-1)$、$(3,+\infty)$ 内严格单增，而在 $(-1,3)$ 内严格单减。

（2） $y=2x^2-\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，令 $y'=4x-\frac{1}{x}=\frac{4x^2-1}{x}=0$，得 $x=\frac{1}{2}$；

当 $x\in(0,\frac{1}{2})$ 时，$y'<0$；当 $x\in(\frac{1}{2},+\infty)$ 时，$y'>0$；

$\therefore y=2x^2-\ln x$ 在 $(0,\frac{1}{2})$ 内严格单增，在 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 内严格单减。

例 2.证明下列不等式：

（1） 当$x>0$时，$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$；（2）当$x>4$时，$2^x>x^2$；

解：（1）**方法一**：令 $f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$，

则当$x>0$时，$f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{1+x}}=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{\sqrt{1+x}})>0$，

$\therefore f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}$ 在$[0,+\infty)$上严格单增；从而 $f(x)>f(0)=0$，

即$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$，结论成立。

方法二：由泰勒公式，得

$f(x)=1+\frac{1}{2}x-\sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-(1+\frac{1}{2}x-\frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}})=\frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}$ （$0<\xi<x$），

$\therefore f(x)=\frac{x^2}{8(1+\xi)^{\frac{3}{2}}}>0$，从而得$1+\frac{1}{2}x>\sqrt{1+x}$，结论成立。

（2）**方法一**：令 $f(x)=2^x-x^2$，则当$x>4$时，$f'(x)=2^x\ln 2-2x$，

$f''(x)=2^x\ln^2 2-2>f''(4)=16\ln^2 2-2=(\ln 4^2)^2-2>(\ln e^2)^2-2>0$，

$\therefore f'(x)=2^x\ln 2-2x$在$(4,+\infty)$内严格单增，

从而 $f'(x)=2^x\ln 2-2x>f'(4)=16\ln 2-4=4(\ln 16-1)>0$，

$\therefore f(x)=2^x-x^2$在$(4,+\infty)$内严格单增，在$(4,+\infty)$内 $f(x)=2^x-x^2>f(4)=8>0$，

$\therefore 2^x>x^2$，结论成立。

注：利用 $f''(x)$的符号判断 $f'(x)$的单调性，利用 $f'(x)$的单调性判断其在某区间上的符号，从而得出 $f(x)$在某区间上的单调性，也是常用的一种方法。

方法二：令 $f(x)=x\ln 2-2\ln x$，

当$x>4$时，$f'(x)=\ln 2-\frac{2}{x}>\ln 2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ln 4-\frac{1}{2}>0$，

$\therefore f(x)=x\ln 2-2\ln x$在$(4,+\infty)$内严格单增，

$\therefore f(x)=x\ln 2-2\ln x>f(4)=4\ln 2-2\ln 4=0$，从而有，$x\ln 2>2\ln x$，

$\therefore e^{x\ln 2}>e^{2\ln x}$，即$2^x>x^2$，结论成立。

例 3．试证方程$\sin x = x$只有一个实根。

解：易知，$\sin 0 = 0$，即$x = 0$是方程的一个根；

令$f(x) = x - \sin x$，则$f'(x) = 1 - \cos x \geq 0$（仅在$x = 2k\pi (k \in Z)$处$f'(x) = 0$），

$\therefore f(x) = x - \sin x$在$(-\infty, +\infty)$内严格单增，从而$f(x)$只有一个零点，

即方程$\sin x = x$只有一个实根。

例 4．求下列函数图形的拐点及凹凸区间：

（1）$y = x + \dfrac{1}{x} (x > 0)$；　（2）$y = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$

解：（1）$y' = 1 - \dfrac{1}{x^2}$，$y'' = \dfrac{2}{x^2}$，$\because$当$x > 0$时，$y'' > 0$，

$\therefore y = x + \dfrac{1}{x}$在$[0, +\infty)$上为凹函数，没有拐点。

（2）$y = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$的定义域为$(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$；

$y' = 1 - \dfrac{1 + x^2}{(x^2 - 1)^2}$，$y'' = \dfrac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$，令$y'' = 0$，得$x = 0$；

当$x < -1$或$0 < x < 1$时，$y'' < 0$；当$-1 < x < 0$或$x > 1$时，$y'' > 0$；

$\therefore y = x + \dfrac{x}{x^2 - 1}$的凹区间为$(-1, 0)$、$(1, +\infty)$，凸区间为$(-\infty, -1)$、$(0, 1)$；$\therefore$拐点为$(0, 0)$。

例 5、利用函数图形的凹凸性，证明不等式：

（1）$\dfrac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}} (x \neq y)$；　（2）$\cos\dfrac{x + y}{2} > \dfrac{\cos x + \cos y}{2}, \forall x, y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$。

证明：（1）令$y = e^x$，$\because y'' = e^x > 0$，$\therefore y = e^x$在$(-\infty, +\infty)$内是凹的。

利用凹函数的定义，$\forall x, y \in (-\infty, +\infty)$ $(x \neq y)$，有$\dfrac{e^x + e^y}{2} > e^{\frac{x+y}{2}}$，结论成立。

（2）令$y = \cos x$，$\because$在$(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$内，$y'' = -\cos x < 0$，$\therefore y = \cos x$在$(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$内是凸的。

利用凸函数的定义，$\forall x, y \in (-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2})$ $(x \neq y)$，有$\cos\dfrac{x + y}{2} > \dfrac{\cos x + \cos y}{2}$，结论成立。