圆锥曲线第二十二节练习册讲评

小本 P84/4、对于抛物线 C: $y^2=2px(p>0)$ 的焦点为 F,点 M 在 C 上, $|\mathrm{MF}|=5$,若以 MF 为直径的圆过点 $(0,2)$，则 C 的方程是________

解： 设 $M(x_0,y_0)$,由 $|\mathrm{MF}|=5$，准线 $x=-\dfrac{p}{2}$，得 $x_0+\dfrac{p}{2}=5, x_0=5-\dfrac{p}{2}$

以 MF 为直径的圆过点 $(0,2)$ 于是 $\dfrac{y_0}{2}=2, y_0=4$

因 ${y_0}^2=2px_0$ 得 $16=2p(5-\dfrac{p}{2}), p=2或p=8$

小本 P84/6

对于抛物线 $y^2=4x$ 上任取一点 Q,点 $P(\mathrm{a},0)$ 都满足 $|\mathrm{PQ}|\geq|a|$,则 a 的范围是

大本 P44/3、抛物线 C: $x^2=-2y$ 与过点 $P(0,-1)$ 的直线 l 交于 A,B 两点，如果 OA 与 OB 的斜率之和为 1，则直线 l 的方程是

解：设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则 $\dfrac{y_1}{x_1}+\dfrac{y_2}{x_2}=1,-\dfrac{x_1}{2}-\dfrac{x_2}{2}=1,x_1+x_2=-2$，

设 l： $y=kx-1$ 代入 $x^2=-2y$ 得 $x^2+2kx-2=0$

于是 $x_1+x_2=-2k=-2,k=1$

大本 P32/类型三 2、已知 $DABC$ 的两个顶点 A,B 的坐标为 A(-5,0), B(5,0),且 AC,BC 的斜率之积 m(m≠0)若顶点 C 的轨迹是去掉顶点的双曲线，求 m 的范围

解：设 C(x,y)，则 $\dfrac{y}{x+5}\mathrm{g}\dfrac{y}{x-5}=m,\mathrm{y}^2=mx^2-25m,mx^2-\mathrm{y}^2=25m,\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{\mathrm{y}^2}{25m}=1$

m>0

大本 P40/应用 1、汽车前灯是抛物面，灯深 10，灯口直径 24，则灯泡到顶点的距离=____

解：建系，设 $y^2=2px(\mathrm{p}>0)$，代点(10,12)，得 $144=20p,p=7.2,\dfrac{p}{2}=3.6$

大本 P42/焦半径 1、抛物线 y^2=2x 的焦点为 F,若 M 是抛物线上的动点，则 $\dfrac{|MO|}{|MF|}$ 的最大值为

解：设 M(x,y),则 $\dfrac{|MO|}{|MF|}=\dfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{x+\dfrac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{x^2+2x}{(x+\dfrac{1}{2})^2}}$

设 $\dfrac{x^2+2x}{(x+\dfrac{1}{2})^2}=t,x^2+2x=tx^2+tx+\dfrac{1}{4}t,(t-1)x^2+(t-2)x+\dfrac{1}{4}t=0$

当 t=1 时 $x=\dfrac{1}{4}$ 适合

当 t≠1 时$D=(t-2)^2-t(t-1)=-3t+4\geq 0, t\leq \dfrac{4}{3}$当且仅当$x=1$时取等号

于是$\dfrac{|MO|}{|MF|}$最大$=\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

大本 42/2、已知 F_1，F_2 分别是椭圆 E：$\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$ 的左、右焦点，F_1，F_2 关于直线 $x+y-2=0$ 的对称点是圆 C 的一条直径的两个端点.

(1)求圆 C 的方程；

(2)设过点 F_2 的直线 l 被椭圆 E 和圆 C 所截得的弦长分别为 a，b，当 ab 最大时，求直线 l 的方程.

解：(1)由题设知，F_1，F_2 的坐标分别为(−2,0)，(2,0)，圆 C 的半径为 2，圆心为原点 O 关于直线 $x+y-2=0$ 的对称点.

设圆心的坐标为(x_0，y_0)，由$\begin{cases}\dfrac{y_0}{x_0}=1,\\ \dfrac{x_0}{2}+\dfrac{y_0}{2}-2=0\end{cases}$解得$\begin{cases}x_0=2,\\ y_0=2.\end{cases}$

所以圆 C 的方程为$(x-2)^2+(y-2)^2=4$.

(2)由题意，可设直线 l 的方程为 $x=my+2$，则圆心到直线 l 的距离$d=\dfrac{|2m|}{\sqrt{1+m^2}}$.

所以$b=2\sqrt{2^2-d^2}=\dfrac{4}{\sqrt{1+m^2}}$.

由$\begin{cases}x=my+2,\\ \dfrac{x^2}{5}+y^2=1\end{cases}$得$(m^2+5)y^2+4my-1=0$.

设 l 与 E 的两个交点坐标分别为(x_1，y_1)，(x_2，y_2)，则

$y_1+y_2=-\dfrac{4m}{m^2+5}$，$y_1y_2=-\dfrac{1}{m^2+5}$.

于是$a=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{(1+m^2)(y_1-y_2)^2}$

$=\sqrt{(1+m^2)[(y_1+y_2)^2-4y_1y_2]}$

$=\sqrt{(1+m^2)\left[\dfrac{16m^2}{(m^2+5)^2}+\dfrac{4}{m^2+5}\right]}$

$=\dfrac{2\sqrt{5}(m^2+1)}{m^2+5}$.

从而 $ab=\dfrac{8\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1}}{m^2+5}=\dfrac{8\sqrt{5}\cdot\sqrt{m^2+1}}{(m^2+1)+4}$

$=\dfrac{8\sqrt{5}}{\sqrt{m^2+1}+\dfrac{4}{\sqrt{m^2+1}}}$

$$\leqslant \frac{8\sqrt{5}}{2\sqrt{\sqrt{m^2+1}\cdot\frac{4}{\sqrt{m^2+1}}}} = 2\sqrt{5}.$$

当且仅当$\sqrt{m^2+1} = \frac{4}{\sqrt{m^2+1}}$，即 $m = \pm\sqrt{3}$ 时等号成立.

故当 $m = \pm\sqrt{3}$时，ab 最大，此时，直线 l 的方程为 $x = \sqrt{3}y+2$ 或 $x = -\sqrt{3}y+2$，

即 $x-\sqrt{3}y-2=0$，或 $x+\sqrt{3}y-2=0$.

大本 P44/5、已知抛物线 C: $y^2 = x$ 上有关于直线l: $y = kx + \frac{3}{4}$对称的不同的两点，求 k 的取值范围

解：设 A(x_1, y_1) ,B(x_2, y_2) 是 C 上关于l对称的不同的两点。

易知$k \neq 0$，于是可设直线 AB 的方程为： $y = -\frac{1}{k}x + m$

联立$\begin{cases} y^2 = x \\ y = -\frac{1}{k}x + m \end{cases}$ 消去 x 得 $y^2 + ky - km = 0$

于是$D = k^2 + 4km > 0$，设 AB 中点$Q(x_0, y_0)$

因 $y_1 + y_2 = -k$，故 $y_0 = -\frac{1}{2}k$，

$y_0 = -\frac{1}{k}x_0 + m, x_0 = km - ky_0 = km + \frac{1}{2}k^2$

代入 $y = kx + \frac{3}{4}$得，$-\frac{1}{2}k = k^2 m + \frac{1}{2}k^3 + \frac{3}{4}$

$km = -\frac{2k^3 + 2k + 3}{4k}$

$k^2 - \frac{2k^3 + 2k + 3}{k} > 0$

$\frac{k^3 + 2k + 3}{k} < 0$

$\frac{(k+1)(k^2 - k + 3)}{k} < 0$

因$k^2 - k + 3 > 0$，故$k(k+1) < 0, -1 < k < 0$