定积分第一节 定积分的认识

1、速度与路程

(1) 匀速运动： 当$v=5$米/秒， 行了 t=6 秒，求路程 s

解:每秒 5 米，6 秒就是，6 个 5 米的累积。

可看成是 6 个宽 1 高 5 的矩形的面积之和。

即是一个宽 6 高 5 的矩形的面积，如图 1

于是$s=vt=20$,

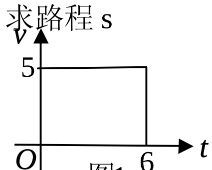


图1

(2)匀变速运动：当$v=2t$米/秒,行了 t=4 秒时，求路程 s

解: 可看成是如图 2 宽 4 高 8 三角形的面积。$s=\frac{1}{2}\times 4\times 8=16$,

(3)变速运动：$v=t^2$米/秒,求 t 从 1 秒变到 2 秒路程 s

解: 可看成是如图 3 宽为 1 的曲边梯形的面积

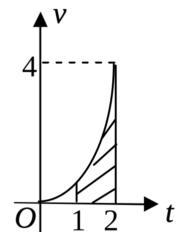


图3

2、力与功

(1)恒力: $F=5$，当位移了 x=6 时，求功 w

解: $w=Fx=30$,如图矩形的面积

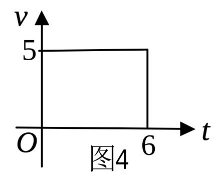


图4

(2)匀变力: $F=2x$，当位移了 x=4 时，求功 w

解: 可看成是如图宽 4 高 8 三角形的面积。

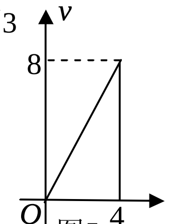


图5

$$w=\frac{1}{2}\times 4\times 8=16$$

(3)变力: $F=\frac{1}{2}x^2+1$，求从 x=1 到 x=3 时，所做的功 w

解: 可看成是如图 6 宽为 2 的曲边梯形的面积。

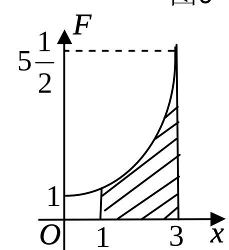
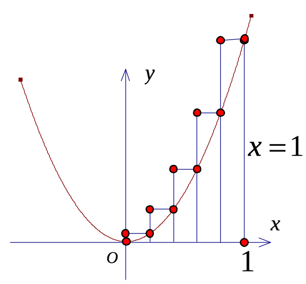


图6

3、求曲边梯形的面积

例 1、求抛物线$f(x)=x^2$与 x=1, y=0 所围成的平面图形的面积

解：把在区间[0,1]作 n 等分,设每份长为$d=\frac{1}{n}$



S 的过剩近似值为

$$S_n=d\times d^2+d\times(2d)^2+d\times(3d)^2+\cdots+d\times(nd)^2$$

$$=d^3(1^2+2^2+\cdots+n^2)=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})$$

当$n\to+\infty$时，$S_n\to\frac{1}{3}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}$

S 的不足近似值为

$$S_n'=\frac{1}{n}\cdot(\frac{0}{n})^2+\frac{1}{n}\cdot(\frac{1}{n})^2+\frac{1}{n}\cdot(\frac{2}{n})^2+\cdots+\frac{1}{n}\cdot(\frac{n-1}{n})^2$$

$$=\frac{1}{n^3}[0^2+1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2]=\frac{1}{n^3}\times\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{1}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n})$$

当$n\to+\infty$时，$S_n'\to\frac{1}{3}$，即$\lim\limits_{n\to\infty}S_n'=\frac{1}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}S_n'$都是曲边梯形的面积它们也叫做$f(x)$在区间[0，1]上的定积分

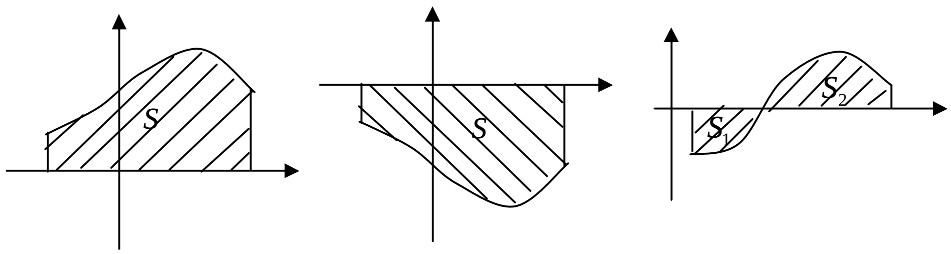
4、定积分的定义：设函数$y=f(x)$在闭区间[a,b]上连续,用分点
$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$将区间[a,b]等分为 n 个小区间，在每一个小区间上依次任取一点$\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$，记$\Delta x=\dfrac{b-a}{n}$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x$叫做$y=f(x)$在区间[a,b]上的定积分，记作$\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x$，$\int$ 是积分号，$dx=\Delta x$，$f(x)$叫被积函数，a是下限，b是上限

5、定积分的几何意义

当 x∈[a,b]时，都有$f(x)\geq 0$，　则$\int_a^b f(x)dx=S$

当 x∈[a,b]时，都有$f(x)\leq 0$，　则$\int_a^b f(x)dx=-S$

当 x∈[a,b]时，$f(x)$如图，$\int_a^b f(x)dx=-S_1+S_2$



例、用几何意义求下列定积分

(1) $\int_2^5(x+1)dx$ (2) $\int_{-3}^{4}2xdx$ (3) $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$ (4) $\int_{-2}^{2}|4-x|dx$

6、定积分的性质

(1) $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$ (2) $\int_a^b[f(x)\pm g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx$

(3) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$