定积分第三节定积分的计算

1、配凑法

例、计算$\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^5 x\sin x\mathrm{d}x$

解：$\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^5 x\sin x\mathrm{d}x=-\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^5 x\mathrm{d}\cos x=-(\frac{1}{6}\cos^6 x)\Big|_0^{\frac{p}{2}}=\frac{1}{6}$

2、换元法

例 1 计算$\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$.

解 1、 先求不定积分$\int\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x$. 令$\sqrt{2x+1}=t$，则$x=\frac{t^2-1}{2}$， $\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$，

$$\int\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int(\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2})\mathrm{d}t=\frac{t^3}{6}+\frac{3}{2}t+C$$

$$=\frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}}+C,$$

从而$\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=(\frac{1}{6}(2x+1)^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}(2x+1)^{\frac{1}{2}})\Big|_0^4=\frac{22}{3}$.

解 2、令$\sqrt{2x+1}=t$，即$x=\frac{t^2-1}{2}$， $\mathrm{d}x=t\mathrm{d}t$，

且当$x=0$时$t=1$，当$x=4$时$t=3$，于是有

$$\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}\mathrm{d}x=\int_1^3(\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2})\mathrm{d}t=(\frac{t^3}{6}+\frac{3t}{2})\Big|_1^3=\frac{22}{3}.$$

可以看出,直接利用定积分的换元积分法要比用不定积分的换元法简便，因为定积分换元的同时也改变了积分限，而省略了还原的过程.

例 2 计算$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 令$x=\sin t$，则$\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$，且当$x=0$时$t=0$，当$x=\frac{1}{2}$时$t=\frac{p}{6}$，于是有

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{p}{6}}\sin^2 t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{p}{6}}\frac{1-\cos 2t}{2}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{p}{6}}\frac{1}{2}\mathrm{d}t-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{p}{6}}\cos 2t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2}t\Big|_0^{\frac{p}{6}}-\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{p}{6}}=\frac{p}{12}-\frac{\sqrt{3}}{8}.$$

例 3 计算$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\mathrm{d}x$.

解 令$\sqrt{e^x-1}=t$，则$x=\ln(t^2+1)$，$\mathrm{d}x=\dfrac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t$，且当$x=0$时$t=0$，当$x=\ln 2$时$t=1$，于是有

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\mathrm{d}x=\int_0^1 t\cdot\frac{2t}{t^2+1}\mathrm{d}t=2\int_0^1\left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)\mathrm{d}t=2(t-\arctan t)\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{2}.$$

3、**分部积分法**

例 1、 计算$\int_0^{\sqrt{3}}\arctan x\mathrm{d}x$.

解: $\int_0^{\sqrt{3}}\arctan x\mathrm{d}x=x\arctan x\Big|_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}x\mathrm{d}\arctan x$

$$=\sqrt{3}\arctan\sqrt{3}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi-\ln 2.$$

例 2、计算$\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x$.

解 令$u=x$，$\mathrm{d}v=e^x\mathrm{d}x$，从而$v=e^x$，于是有

$$\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x=\int_0^1 x\mathrm{d}e^x=xe^x\Big|_0^1-\int_0^1 e^x\mathrm{d}x=e-e^x\Big|_0^1=1.$$

4、瓦里斯公式：$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\mathrm{d}x$，则

$$J_{2m}=\frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\frac{\pi}{2},$$

$$J_{2m+1}=\frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{3}\cdot 1=\frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$$

证明：

当$n\geq 2$时，$J_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx=-\sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx$

$=(n-1)[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}xdx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n xdx]=(n-1)J_{n-2}-(n-1)J_n$

$nJ_n=(n-1)J_{n-2}, J_n=\dfrac{n-1}{n}J_{n-2}(n\geq 2)$

因$J_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin xdx=1, J_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\dfrac{\pi}{2},$

故$J_{2m}=\dfrac{2m-1}{2m}\cdot\dfrac{2m-3}{2m-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2},$

$J_{2m+1}=\dfrac{2m}{2m+1}\cdot\dfrac{2m-2}{2m-1}\cdot\cdots\cdot\dfrac{2}{3}\cdot 1=\dfrac{(2m)!!}{(2m+1)!!}$

例 1、 计算$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\mathrm{d}x$.

解 因为$\cos^5 x$为偶函数,则由瓦里斯公式有

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^5 x\mathrm{d}x=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}=\frac{16}{15}.$$

例 2、计算$\int_0^1 \frac{x^{10}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 设$x=\sin t$,则$\mathrm{d}x=\cos t\mathrm{d}t$ ，且当$x=0$时$t=0$，当$x=1$时$t=\frac{p}{2}$，于是有

$$\int_0^1 \frac{x^{10}}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{p}{2}} \frac{\sin^{10} t}{\sqrt{1-\sin^2 t}}\cos t\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{10} t\mathrm{d}t=\frac{9}{10}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{2}=\frac{63}{512}p \text{ .}$$