# **定积分**第二节　微积分基本定理

*微积分基本定理：若 $F'(x)=f(x)$，$\int_a^b F'(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)\big|_a^b$

证：用分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 将区间[a,b]等分为 n 个小区间

则 $F(x_1)-F(x_0)+F(x_2)-F(x_1)+\cdots+F(x_n)-F(x_{n-1}) = F(x_n)-F(x_0)=F(b)-F(a)$

$[\frac{F(x_1)-F(x_0)}{\Delta x}+\frac{F(x_2)-F(x_1)}{\Delta x}+\cdots+\frac{F(x_n)-F(x_{n-1})}{\Delta x}]\Delta x = F(x_n)-F(x_0)=F(b)-F(a)$

由中值定理，在每一个小区间上依次存在一点 $x_i\,(i=1,2,\cdots,n)$ 使左边 $=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$，

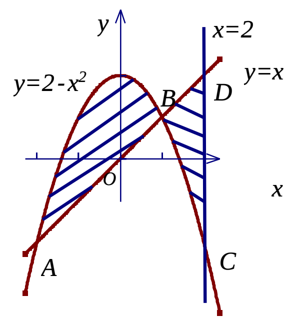
于是 $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = F(b)-F(a)$，$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \lim_{n\to\infty}[F(b)-F(a)] = F(b)-F(a)$

例 1、计算下列定积分

(1) $\int_1^2 \frac{1}{x}dx$ (2) $\int_1^3 (2x-\frac{1}{x^2})dx$ (3) $\int_0^{\pi}\sin x dx$ (4) $\int_0^{2\pi}\sin x dx$

例 2、计算曲线 $y^2=x$，$y=x^2$ 所围成的图形的面积

例 3、如图，求阴影部分的面积




解：

由 $\begin{cases} y=x \\ y=2-x^2 \end{cases}$ 解得 $A(-2,-2), B(1,1)$

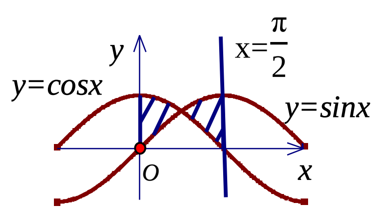
由 $\begin{cases} y=x \\ x=2 \end{cases}$ 得 $D(-2,-2)$，由 $\begin{cases} x=2 \\ y=2-x^2 \end{cases}$ 解得 $C(2,-2)$

于是

$$S=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)dx+\int_1^2[x-(2-x^2)]dx$$

$$=(2x-\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2)\big|_{-2}^{1}+(\frac{1}{2}x^2-2x+\frac{1}{3}x^3)\big|_1^2$$

例 4、如图，求阴影部分的面积




解：由对称性知

$$S=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx = 2(\sin x+\cos x)\big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2(\sqrt{2}-1)$$

**例 5**、设函数 $f(x)=\begin{cases} x+1, & x\le 1, \\ \frac{x^2}{2}, & x>1, \end{cases}$，求 $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

**解**：$\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x+\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1(x+1)\mathrm{d}x+\int_1^2\frac{x^2}{2}\mathrm{d}x$

$$=(\frac{x^2}{2}+x)\Big|_0^1+\frac{x^3}{6}\Big|_1^2=\frac{3}{2}+\frac{7}{6}=\frac{8}{3}.$$

**例 6** 计算 $\int_0^p \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\mathrm{d}x$ .

**解** 由于 $\sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x} = \sqrt{\sin^3 x\left(1 - \sin^2 x\right)} = \sin^{\frac{3}{2}} x\left|\cos x\right|$ , $x \in [0, p]$ ,

当 $x \in \left[0, \frac{p}{2}\right]$时，$\left|\cos x\right| = \cos x$；当 $x \in \left[\frac{p}{2}, p\right]$时，$\left|\cos x\right| = -\cos x$ .

于是有

$$\int_0^p \sqrt{\sin^3 x - \sin^5 x}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x\cos x\mathrm{d}x + \int_{\frac{p}{2}}^{p} \sin^{\frac{3}{2}} x\left(-\cos x\right)\mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{\frac{3}{2}} x\mathrm{d}\sin x - \int_{\frac{p}{2}}^{p} \sin^{\frac{3}{2}} x\mathrm{d}\sin x$$

$$= \frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\Big|_0^{\frac{p}{2}} - \frac{2}{5}\sin^{\frac{5}{2}} x\Big|_{\frac{p}{2}}^{p} = \frac{2}{5} - (-\frac{2}{5}) = \frac{4}{5} .$$