定积分第六节　向量函数与弧长

一、向量函数的认识

某质点 P 作直线运动，若开始时在 A(1，2),1 秒后运动到 B(3,5), 设 t 秒时刻运动到 $P(x,y)$，于是 $\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB},(x-1,y-2)=t(2,3)$，$\begin{cases}x=1+2t\\ y=2+3t\end{cases}$ 它是质点 P 运动的参数方程

质点 $P(x,y)$ 的每一个位置都对应于一个以原点为起点的向量 $\overrightarrow{OP}$ 它的坐标就是点 P 的坐标，于是 $\overrightarrow{OP}=(1+2t,2+3t)$ 可以看成时间 t 的函数这个函数叫做向量函数，可记为 $\overrightarrow{r(t)}=(1+2t,2+3t)=(1+2t)\vec{i}+(2+3t)\vec{j}$，这个向量函数的终点形成的图形就一条直线

向量函数 $\overrightarrow{r(\theta)}=(a\cos\theta,b\sin\theta)=a\cos\theta\,\vec{i}+b\sin\theta\,\vec{j}$ 表示椭圆，

向量函数 $\overrightarrow{r(t)}=(1+2t,2+3t,1+4t)=(1+2t)\vec{i}+(2+3t)\vec{j}+(1+4t)\vec{k}$ 表示三维空间的一条直线

例 1、求圆柱面 $x^2+y^2=1$和平面y+z = 2 的交线的向量方程

解：设 $x=\cos\theta,y=\sin\theta$,则 $z=2-y=2-\sin\theta$

于是所求的向量方程是 $\overrightarrow{r(\theta)}=(\cos\theta,\sin\theta,2-\sin\theta)=\cos\theta\,\vec{i}+\sin\theta\,\vec{j}+(2-\sin\theta)\vec{k}$

例 2、求过(1,2,3)点且方向向量为(1,-2,2)的直线的向量方程

解：$\overrightarrow{r(t)}-(1,2,3)=t(1,-2,2)$，于是 $\overrightarrow{r(t)}=(1+t,2-2t,3+2t)$ 为所求

二、向量函数的导数

设向量函数 $r(t)=(x(t),y(t))$ 的导数的定义与一元函数的定义类似

$$\frac{dr(t)}{dt}=r'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{r(t+\Delta t)-r(t)}{\Delta t}=(\lim_{\Delta t\to 0}\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},\lim_{\Delta t\to 0}\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t})=(x'(t),y'(t))$$

例、求一条螺旋线 $r(t)=(2\cos t,\sin t,t)$ 在点 $(0,1,\frac{\pi}{2})$ 处的切线的参数方程

解：$r'(t)=(-2\sin t,\cos t,1)$，在点 $(0,1,\frac{\pi}{2})$ 处 $t=\frac{\pi}{2},r'(\frac{\pi}{2})=(-2,0,1)$

于是切线的参数方程是 $x=-2t,y=1,z=\frac{\pi}{2}+t$

原有的求导法则仍适用

三、向量函数的积分

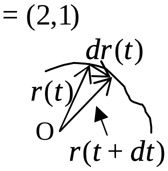
1、积分：设向量函数 $r(t)=(x(t),y(t))=x(t)i+y(t)j$

$$\int_a^b r(t)dt=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}r(t_i)\Delta x=\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}x(t_i)\Delta t]i+\lim_{n\to\infty}[\sum_{i=1}^{n}y(t_i)\Delta x]j=[\int_a^b x(t)dt]i+[\int_a^b y(t)dt]j$$

2、微积分基本定理仍成立 $\int_a^b r'(t)dt=r(b)-r(a)=r(t)\big|_a^b$

例求设$r(t)=(2\cos t,\sin t)$，则 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}r(t)dt=(2\sin t,-\cos t)\big|_0^{\frac{\pi}{2}}=(2,0)-(0,-1)=(2,1)$

四、弧长



1、设$r(t)=(x(t),y(t))(a\le t\le b)$，设其弧长为 s

因为$dr(t)=(dx(t),dy(t))=(x'(t)dt,y'(t)dt)$

所以 $ds=|dr(t)|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$，于是 $s=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$

2、$ds=|dr(t)|=|r'(t)|dt$，于是弧长的向量形式是 $s=\int_a^b|r'(t)|dt$

3、曲线 $y=f(x)(a\le x\le b)$ 的弧长

因为曲线向量函数是 $r(x)=(x,f(x))(a\le x\le b)$

于是弧长 $s=\int_a^b\sqrt{1+[f(x)]^2}dx$

例、求圆柱螺旋线 $r(t)=(\cos t,\sin t,t)$ 在 $0\le t\le 2\pi$ 时的弧长

解：因为 $r'(t)=(-\sin t,\cos t,1)$，所以

$$l=\int_0^{2\pi}|r'(t)|dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin t)^2+\cos^2 t+1}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2}dt=2\sqrt{2}\pi$$

4、弧长函数 $s(t)=\int_a^t|r'(t)|dt=\int_a^t\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}dt$，于是 $s'(t)=|r'(t)|$

五、曲率

1、单位切向量：设向量方程 $r(t)$ 确定曲线 C，则 $r'(t)$ 是曲线 C 在 t 处的切向量，单位切向量 $\frac{r'(t)}{|r'(t)|}$ 常用 $T(t)$ 表示，即 $T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}$

2、曲率的定义：$k=\left|\frac{dT}{ds}\right|$，这里 T 是单位切向量，s 是弧长

3、曲率公式 1：$k=\left|\frac{dT}{ds}\right|=\left|\frac{dT/dt}{ds/dt}\right|=\left|\frac{T'(t)}{|r'(t)|}\right|=\frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}$

4、定理：若 $|r(t)|=c$(一个常数)，则 $r(t)\perp r'(t)$ 总成立

证明：因 $r^2(t)=|r(t)|^2=c^2$，两对 t 求导得 $2r(t)r'(t)=0$，于是 $r(t)\perp r'(t)$

5、曲率公式 2：$k=\frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3}$

证明：因为 $T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}=\frac{r'(t)}{s'(t)}$ 所以 $r'(t)=s'(t)T(t)$，于是 $r''(t)=s''(t)T(t)+s'(t)T'(t)$

故 $r'(t)\times r''(t)=s'(t)T(t)\times[s''(t)T(t)+s'(t)T'(t)]=0+[s'(t)]^2T(t)\times T'(t)$

因 $|T(t)|=1$，故 $T(t)\perp T'(t)$，于是 $|T(t)\times T'(t)|=|T(t)||T'(t)|=|T'(t)|$

因此 $|r'(t)\times r''(t)|=[s'(t)]^2|T'(t)|=|r'(t)|^2|T'(t)|$(注 $s(t)$ 是标量)

$\frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3}=\frac{|r'(t)|^2|T'(t)|}{|r'(t)|^3}=\frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}=k$ 证毕

6、曲线 $y=f(x)$ 的曲率 $k=\frac{|f''(x)|}{[\sqrt{1+(f'(x))^2}]^3}$

曲线向量函数是 $r(x)=(x,f(x),0)$，$r'(x)=(1,f'(x),0),r''(x)=(0,f''(x),0)$

于是 $|r'(x)|=\sqrt{1+[f'(x)]^2}$，$r'(x)\times r''(x)=[i+f'(x)j]\times f''(x)j=f''(x)k$，

曲率 $k=\frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3}=\frac{|f''(x)|}{[\sqrt{1+(f'(x))^2}]^3}$

例 1、求圆半径为 a 的圆 $r(t)=(a\cos t,a\sin t)$ 的曲率

解：$r'(t)=(-a\sin t,a\cos t)$，$|r'(t)|=a$，于是 $T(t)=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}=(-\sin t,\cos t)$

$T'(t)=(-\cos t,-\sin t)$，$|T'(t)|=1$，故曲率 $k=\frac{|T'(t)|}{|r'(t)|}=\frac{1}{a}$

例 2、求抛物线 $y = x^2$ 在原点处的曲率

解：$k = \frac{|y''|}{[\sqrt{1+(y')^2}]^3} = \frac{2}{(\sqrt{1+4x^2})^3} = \frac{2}{(\sqrt{1+4\times 0^2})^3} = 2$

例 3、求三次挠线 $r(t) = (t, t^2, t^3)$ 在原点处的曲率

解：$r'(t) = (1, 2t, 3t^2), r''(t) = (0, 2, 6t)$，$|r'(t)| = \sqrt{1+4t^2+9t^4}$

$$r'(t)\times r''(t) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2 i - 6tj + 2k,\quad |r'(t)\times r''(t)| = \sqrt{(6t^2)^2+(6t)^2+2^2} = 2\sqrt{9t^4+9t^2+1}$$

于是 $k = \frac{|r'(t)\times r''(t)|}{|r'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{(\sqrt{1+4t^2+9t^4})^3} = \frac{2}{1} = 2$