定积分第四节 定积分的性质

性质 1、设在区间$[a,b]$上 $f(x)\ge 0$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge 0\ (a<b)$.

证 由条件有 $f(x_i)\ge 0\ (i=1,2,\mathbf{L},n)$，又$\Delta x_i\ge 0\ (i=1,2,\mathbf{L},n)$，

于是有$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i\ge 0$，所以$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{l\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i\ge 0$． **证毕**.

推论 1 设在区间$[a,b]$上 $f(x)\le g(x)$，则$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\ (a<b)$.

证 因$g(x)-f(x)\ge 0$，故$\int_a^b [g(x)-f(x)]\mathrm{d}x\ge 0$，$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x-\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge 0$

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$

推论 2 $\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\ (a<b)$.

证 因$-|f(x)|\le f(x)\le |f(x)|\ (a\le x\le b)$，故$-\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$，即$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x\ (a<b)$． **证毕**.

性质 2、 设M 及m 分别是函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上的最大值与最小值，则

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M(b-a)\ (a<b) .$$

证 因为$m\le f(x)\le M$，则$\int_a^b m\mathrm{d}x\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le\int_a^b M\mathrm{d}x$，

因$\int_a^b m\mathrm{d}x=m(b-a)$，$\int_a^b M\mathrm{d}x=M(b-a)$，代入上式即得结论成立.**证毕**.

性质 3、 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，则至少存在一点$x\in[a,b]$，使得式

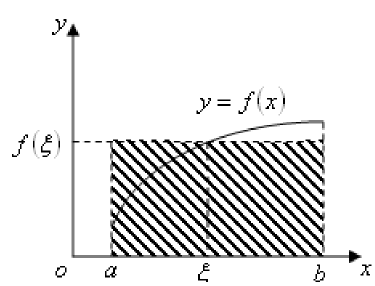
$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(x)(b-a)$$

成立．这个公式叫做**积分中值公式**.

证 由条件知在区间$[a,b]$上 $f(x)$ 必存在最大值M 和最小值m，由性质 6 有

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M(b-a) ,$$

即$m\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M$.



这表明数值$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$介于连续函数 $f(x)$ 的最大值M 和最小值m之间. 由闭区间上连续函数的介值定理可知, 至少存在一点$x\in[a,b]$使得

$f(x)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=f(x)(b-a)$ 成立.

积分中值定理在$a \ge b$时也成立.

积分中值定理的几何意义：如图，以非负连续曲线 $f(x)$ 为曲边，以区间$[a,b]$为底边的曲边梯形的面积等于以$b-a$为底，以区间$[a,b]$上某点x处的函数值 $f(x)$ 为高的矩形面积.

例 1 利用定积分的性质，比较下列各对定积分的大小：

(1) $\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x$ 和 $\int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$；　　　　(2) $\int_1^e \ln x \mathrm{d}x$ 和 $\int_1^e \ln^2 x \mathrm{d}x$.

解 (1)在区间$[0,1]$上，$x^2 - x^3 = x^2(1-x) \ge 0$，　$x^2 \ge x^3$，　$\int_0^1 x^2 \mathrm{d}x \ge \int_0^1 x^3 \mathrm{d}x$.

(2)在区间$[1,e]$上，$0 \le \ln x \le 1$，　$\ln x \ge \ln^2 x$，　$\int_1^e \ln x \mathrm{d}x \ge \int_1^e \ln^2 x \mathrm{d}x$.

例 2 求证：$p \le \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{5p}{4}} (1+\sin^2 x)\mathrm{d}x \le 2p$.

解 由于$1 \le 1+\sin^2 x \le 2, x \in \left[\frac{p}{4}, \frac{5p}{4}\right]$，所以$p \le \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{5p}{4}} (1+\sin^2 x)\mathrm{d}x \le 2p$.

例 3 证明不等式$\frac{1}{2} \le \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

解 $f'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x \cdot (x - \tan x)}{x^2} < 0$，$x \in \left(\frac{p}{4}, \frac{p}{2}\right)$所以 $f(x)$ 在区间$\left[\frac{p}{4}, \frac{p}{2}\right]$上单调递减．于是$m = f\left(\frac{p}{2}\right) = \frac{\sin\frac{p}{2}}{\frac{p}{2}} = \frac{2}{p}$，$M = f\left(\frac{p}{4}\right) = \frac{\sin\frac{p}{4}}{\frac{p}{4}} = \frac{2\sqrt{2}}{p}$

$\frac{2}{p}\left(\frac{p}{2} - \frac{p}{4}\right) \le \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \le \frac{2\sqrt{2}}{p}\left(\frac{p}{2} - \frac{p}{4}\right)$，故$\frac{1}{2} \le \int_{\frac{p}{4}}^{\frac{p}{2}} \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x \le \frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 4 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$ $(a<b)$ 上连续且 $f(x) > 0$，证明$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$.

证 由积分中值定理，在区间$[a,b]$上至少存在一点x，使得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(x)(b-a)$.

由于 $f(x) > 0$，$a \le x \le b$，故 $f(x) > 0$，又$b-a>0$，所以$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x > 0$．**证毕**.

性质 4：如果函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，则积分上限函数$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$在区间$[a,b]$上可导，且其导数为$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$ $(a \le x \le b)$.

证 对任意$x \in (a,b)$，给 x 以增量Δx，且使得当$|\Delta x|$足够小时$x + \Delta x \in (a,b)$，则相应函数$\Phi(x)$的改变量为$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t$.

又由积分中值定理有$\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)\mathrm{d}t = f(x)\Delta x$，$x$ 介于 x 和 $x+\Delta x$ 之间.

所以$\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x)\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to x}f(x)=f(x)$.

最后一步是利用了 $f(x)$ 的连续性．即 $\Phi(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 在区间 (a,b) 上可导，且 $\Phi'(x)=f(x)$.

当 x 取区间端点 a 或 b 时，上面 $\Delta x\to 0$ 相应地改为 $\Delta x\to 0^+$ 或 $\Delta x\to 0^-$，即得 $\Phi'_+(a)=f(a)$ 或 $\Phi'_-(b)=f(b)$．**证毕**.

此定理表明积分上限函数对上限的导数等于被积函数在上限处的数值.

由(1)式及定理 1，我们有如下推论.

推论 1 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，则积分下限函数 $\Psi(x)=\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ 在区间$[a,b]$上可导，且 $\Psi'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\mathrm{d}t=-f(x)$.

例 1 设 $\Phi(x)=\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$,求 $\Phi'(x)$.

解 由定理 1 得 $\Phi'(x)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t=e^{-x^2}$.

例 2 设 $\Psi(x)=\int_x^{-2}\sqrt[3]{t}\ln(1+t^2)\mathrm{d}t$,求 $\Psi'\left(x\right)$.

解 由推论 1 得 $\Psi'(x)=-\sqrt[3]{x}\ln(1+x^2)$.

例 3 设函数 $f(x)=\int_1^{x^2}\sqrt{1+t^3}\mathrm{d}t$,求 $f'(x)$.

解 这是复合函数求导问题．函数 $y=f(x)$ 可以看作是由 $y=\int_0^u\sqrt{1+t^3}\mathrm{d}t$ 和 $u=x^2$ 复合而成，由复合函数求导公式可得

$$
\begin{aligned}
f'(x)&=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(\int_0^u\sqrt{1+t^3}\mathrm{d}t)\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)\\
&=\sqrt{1+u^3}\cdot 2x=2x\sqrt{1+x^6}\ .
\end{aligned}
$$

例 4 求函数 $f(x)=\int_{x^2}^{\sqrt{x}}\cos t^2\mathrm{d}t$ 的导数.

解 函数 $f(x)$ 的表达式中，上下限均是变量 x 的函数，利用积分区间可加性，将 $f(x)$ 转化为 $f(x)=\int_{x^2}^0\cos t^2\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x}}\cos t^2\mathrm{d}t=-\int_0^{x^2}\cos t^2\mathrm{d}t+\int_0^{\sqrt{x}}\cos t^2\mathrm{d}t$，

所以 $f'(x)=-\cos(x^2)^2\cdot(x^2)'+\cos(\sqrt{x})^2\cdot(\sqrt{x})'=-2x\cos x^4+\dfrac{\cos x}{2\sqrt{x}}$.

推论 2 设函数 $f(x)$ 在区间$[a,b]$上连续，函数 $u(x)$、$v(x)$ 在区间$[a,b]$上可导，且当 $x\in[a,b]$，$u(x)$、$v(x)\in[a,b]$，则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)}f(t)\mathrm{d}t=f\left[v(x)\right]v'(x)-f\left[u(x)\right]u'(x),x\in[a,b]\ .$$

例 5 设 $x \geq 0$ 时函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^{x^2} f(t)\mathrm{d}t = x^2 + x^3$,求 $f(2)$.

解:两边对 x 求导得 $f(x^2)\cdot 2x = 2x + 3x^2$,

$$f(x^2) = 1 + \frac{3}{2}x , \quad f(2) = f(\sqrt{2}^2) = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2} .$$

例 6 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2}$.

解 该极限是"$\dfrac{0}{0}$"型未定式极限.利用洛必达法则有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}\mathrm{d}t}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-e^{-\cos^2 x}(-\sin x)}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{-\cos^2 x}\sin x}{2x} = \frac{1}{2e} .$$

定理 2 如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续,则积分上限函数

$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ 是函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数.