

为 $\sqrt{2}$, 则双曲线方程为_____

14、已知点 P 在抛物线 $y^2=4x$ 上, 那么点 P 到点 $Q(2, -1)$ 的距离与点 P 到抛物线焦点的距离之和取得最小值时, 点 P 的坐标为_____

15、椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 两个焦点 F_1, F_2 , 动点 P 在椭圆上, $\cos \angle F_1PF_2$ 的最小值为 $-\frac{1}{9}$

三. 解答题

16. 求下列曲线的标准方程:

(1) 过点 $(2, -4)$ 的抛物线

(2) 与 $9x^2 - y^2 = 4$ 有相同的渐近线且过 $(1, 4)$ 点的双曲线。

17、命题 p : 实数 x 满足 $x^2 - 4ax + 3a^2 < 0$, 其中 $a > 0$, 命题 q : 实数 x 满足 $x^2 - 8x + 12 > 0$, 且 p 是 q 的充分不必要条件, 求 a 的取值范围.

18. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且过点 $(2, 1)$

(1) 求椭圆 C 的方程

(2) 设过点 $(0, 1)$ 直线倾斜角为 45° 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 求 $|AB|$

19. 已知命题 p : $f(x) = 4x - m$, 对 $\forall x \in [1, 2]$ 都有 $f(x) \leq 6$ 恒成立,

命题 q : 函数 $y = 4x^2 + 4(m - 2)x + 1$ 大于 0 恒成立. 若 $p \vee q$ 为真, $p \wedge q$ 为假, 求 m 的范围。

20. 已知抛物线 $y^2 = 8x$

(1) 当弦 AB 的中点坐标为 $(2, 1)$ 时, 求直线 AB 的方程

(2) 当弦 AB 所在的直线方程为 $x = 2y + m$, $\angle MON = 90^\circ$, 求弦 AB 的中点 Q 的坐标。

21、已知以原点为圆心的圆 C 过点 $A(1, \sqrt{3})$

(1) 求圆 C 的方程

(2) P 是圆 C 上的动点, 过作 x 轴的垂线垂足 B , 若 $\vec{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{BP}$, 求 M 的轨迹 E 的方程

(3) 直线 $l: y = kx + m$ 与曲线 E 交于 A, B 两点 (A, B 不是左右顶点), 以 AB 为直径的圆过曲线 E 的右顶点 M , 求证: 直线 l 过定点

为 $\sqrt{2}$, 则双曲线方程为 $x^2 - y^2 = 2$

14. 已知点 P 在抛物线 $y^2 = 4x$ 上, 那么点 P 到点 $Q(2, -1)$ 的距离与点 P 到抛物线焦点的距离之和取得最小值时, 点 P 的坐标为 $(-\frac{1}{4}, 1)$ _____

15. 椭圆 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ 两个焦点 F_1, F_2 , 动点 P 在椭圆上, $\cos \angle F_1 P F_2$ 的最小值为 $-\frac{1}{9}$

三. 解答题

16. 求下列曲线的标准方程:

(1) 过点 $(2, -4)$ 的抛物线方程

(2) 与 $9x^2 - y^2 = 4$ 有相同的渐近线且过 $(1, 4)$ 点的双曲线。

解: (1) 当焦点在 x 轴时设抛物线方程为 $y^2 = ax (a > 0)$, 则 $2a = 16, a = 8$

当焦点在 y 轴时设抛物线方程为 $x^2 = ay (a < 0)$, 则 $-4a = 4, a = -1$

综上抛物线方程是 $y^2 = 8x$ 或 $x^2 = -y$

(2) 设双曲线方程 $9x^2 - y^2 = l (l \neq 0)$, 则 $9 - 16 = l, l = -7$

于是双曲线是 $9x^2 - y^2 = -7$, 即 $\frac{y^2}{7} - \frac{9x^2}{7} = 1$

17. 命题 p : 实数 x 满足 $x^2 - 4ax + 3a^2 < 0$, 其中 $a > 0$, 命题 q : 实数 x 满足 $x^2 - 8x + 12 > 0$, 且 p 是 q 的充分不必要条件, 求 a 的取值范围.

解: 设 $A = \{x | x^2 - 4ax + 3a^2 < 0 (a > 0)\} = \{x | a < x < 3a\}$,

$B = \{x | x^2 - 8x + 12 > 0\} = \{x | x < 2 \text{ 或 } x > 6\}$

因为 p 是 q 的充分不必要条件

于是 $p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$, 故 $A \subsetneq B$

$$\begin{cases} 3a \leq 2 \\ a > 0 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} a \leq 6 \\ a > 0 \end{cases} \quad \text{即 } 0 < a \leq \frac{2}{3} \text{ 或 } a \geq 6$$

18. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且过点 $(2, 1)$

(1) 求椭圆 C 的方程

(2) 设过点 $(0, 1)$ 直线倾斜角为 45° 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 求 $|AB|$

解(1) 解: $c = \frac{\sqrt{3}}{2}a, b^2 = \frac{1}{4}a^2$, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2} = 1, x^2 + 4y^2 = a^2$

过点 $(2, 1)$, 于是 $a^2 = 8, C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) 设直线 $l: y = kx + 1$ 联立 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$ 消去 y 得 $5x^2 + 8x - 4 = 0$

$$x_1 + x_2 = -\frac{8}{5}, x_1 x_2 = \frac{-4}{5}$$

$$|AB| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{2} \sqrt{\left(-\frac{8}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}} = \frac{12}{5} \sqrt{2}$$

19. 已知命题 $p: f(x) = 4x - m$, 对 $\forall x \in [1, 2]$ 都有 $f(x) \leq 6$ 恒成立,

命题 q : 函数 $y = 4x^2 + 4(m-2)x + 1$ 大于 0 恒成立. 若 $p \vee q$ 为真, $p \wedge q$ 为假, 求 m 的范围.

解: p 真: $f(x)_{\max} \leq 6, f(x)_{\max} = 14 - m$, 于是 $8 - m \leq 6, m \geq 2$

q 真: $16(m-2)^2 - 16 < 0, (m-3)(m-1) < 0, 1 < m < 3$

$p \vee q$ 真: $m > 1$ $p \wedge q$ 真: $2 \leq m < 3$

于是 m 的范围是 $1 < m < 2$ 或 $m \geq 3$

20. 已知抛物线 $y^2 = 8x$

(1) 当弦 AB 的中点坐标为 $(2, 1)$ 时, 求直线 AB 的方程

(2) 当弦 AB 所在的直线方程为 $x = 2y + m$, $\angle MON = 90^\circ$, 求弦 AB 的中点 Q 的坐标.

解 (1) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$$y_1^2 = 8x_1, y_2^2 = 8x_2, (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 8(x_1 - x_2), k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{8}{y_1 + y_2} = \frac{8}{2} = 4$$

弦 AB 所在的直线方程 $y - 1 = 4(x - 2), y = 4x - 7$

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $OA \perp OB$,

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0, x_1 = \frac{y_1^2}{8}, x_2 = \frac{y_2^2}{8}, \text{ 于是 } \frac{y_1^2 y_2^2}{64} + y_1 y_2 = 0, y_1 y_2 = -64$$

由 $\begin{cases} x = 2y + m \\ y^2 = 8x \end{cases}$ 消去 x 得 $y^2 - 16y - 8m = 0$, 得 $y_1 + y_2 = 16, y_1 y_2 = -8m = -64, m = 8$

设 $Q(x_0, y_0)$, 则 $y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = 8, x_0 = 2y_0 + m = 24$, 于是 $Q(24, 8)$

21. 已知以原点为圆心的圆 C 过点 $A(1, \sqrt{3})$

(1) 求圆 C 的方程

(2) P 是圆 C 上的动点, 过作 x 轴的垂线垂足 B , 若 $\vec{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{BP}$, 求 M 的轨迹 E 的方程

(3) 直线 $l: y = kx + m$ 与曲线 E 交于 A、B 两点(A、B 不是左右顶点), 以 AB 为直径的圆过曲线 E 的右顶点 M, 求证: 直线 l 过定点

解(1) 圆 C 的半径 $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

$$\text{圆 C 的方程 } x^2 + y^2 = 4$$

(2) 设 $M(x, y)$, $P(x_0, y_0)$, 故 $x_0^2 + y_0^2 = 4$

由于 $PB \perp x$ 轴于 B $\overline{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \overline{BP}$, 于是 $x = x_0, y = \frac{\sqrt{3}}{2} y_0$

$x_0 = x, y_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} y$, 因此 $x^2 + \frac{4y^2}{3} = 4$, 曲线 E: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$,

(3) 右顶点 $M(2, 0)$, 依题意

$$\overline{MA} \cdot \overline{MB} = 0, \text{ 故 } (x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1 y_2 = 0$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \text{ 消 } y \text{ 得 } (4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 + 3}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 12}{4k^2 + 3},$$

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = \frac{4m^2 - 12}{4k^2 + 3} + \frac{16km}{4k^2 + 3} + 4 = \frac{16k^2 + 16km + 4m^2}{4k^2 + 3}$$

$$y_1 y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{4k^2 m^2 - 12k^2}{4k^2 + 3} - \frac{8k^2 m^2}{4k^2 + 3} + m^2 = \frac{3m^2 - 12k^2}{4k^2 + 3}$$

$$\frac{4k^2 + 16km + 7m^2}{4k^2 + 3} = 0, 4k^2 + 16km + 7m^2 = 0, (2k + m)(2k + 7m) = 0, k = -\frac{1}{2}m \text{ 或 } k = -\frac{7}{2}m$$

当 $k = -\frac{1}{2}m$ 时, $l: y = -\frac{1}{2}mx + m = -\frac{1}{2}m(x - 2)$ 过右顶点舍去

当 $k = -\frac{7}{2}m$ 时, $l: y = -\frac{7}{2}mx + m = -\frac{7}{2}m(x - \frac{2}{7})$ 过定点 $(\frac{2}{7}, 0)$, 此时 $\Delta > 0$

综上直线 l 过定点 $(\frac{2}{7}, 0)$

BAACB DACDC

$$x^2 = 8y, -2 < a < 2, x^2 - y^2 = 2, (\frac{1}{4}, -1), -\frac{1}{9}$$

16(1) 焦点在 x 轴时设抛物线方程为 $y^2 = ax (a > 0)$, 则 $2a = 16, a = 8$

当焦点在 y 轴时设抛物线方程为 $x^2 = ay (a < 0)$, 则 $-4a = 4, a = -1$

综上抛物线方程是 $y^2 = 8x$ 或 $x^2 = -y$

(2) 设双曲线方程 $9x^2 - y^2 = l (l \neq 0)$, 则 $9 - 16 = l, l = -7$

于是双曲线是 $9x^2 - y^2 = -7$, 即 $\frac{y^2}{7} - \frac{9x^2}{7} = 1$

17. 解: 设 $A = \{x | x^2 - 4ax + 3a^2 < 0 (a > 0)\} = \{x | a < x < 3a\}$,

$B = \{x | x^2 - 8x + 12 > 0\} = \{x | x < 2 \text{ 或 } x > 6\}$

因为 p 是 q 的充分不必要条件

于是 $p \Rightarrow q$ 且 $q \not\Rightarrow p$, 故 $A \subsetneq B$ $\begin{matrix} \text{即 } 3a \leq 2 \\ \text{或 } a \geq 6 \end{matrix}$ 即 $0 < a \leq \frac{2}{3}$ 或 $a \geq 6$

18. 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且过点 $(2, 1)$

(1) 求椭圆 C 的方程

(2) 设过点 $(0, 1)$ 直线倾斜角为 45° 的直线 l 交椭圆于 A, B 两点, 求 $|AB|$

解(1) 解: $c = \frac{\sqrt{3}}{2}a, b^2 = \frac{1}{4}a^2$, 椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{4y^2}{a^2} = 1, x^2 + 4y^2 = a^2$

过点 $(2, 1)$, 于是 $a^2 = 8, C: \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{2} = 1$

(2) 设直线 $l: y = kx + 1$ 联立 $\begin{cases} y = x + 1 \\ x^2 + 4y^2 = 8 \end{cases}$ 消去 y 得 $5x^2 + 8x - 4 = 0$

$x_1 + x_2 = -\frac{8}{5}, x_1 x_2 = \frac{-4}{5}$

$|AB| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} = \sqrt{2} \sqrt{\left(-\frac{8}{5}\right)^2 + \frac{16}{5}} = \frac{12}{5} \sqrt{2}$

19. p 真: $f(x)_{\max} \leq 6, f(x)_{\max} = 14 - m$, 于是 $8 - m \leq 6, m \geq 2$

q 真: $16(m-2)^2 - 16 < 0, (m-3)(m-1) < 0, 1 < m < 3$

$p \vee q$ 真: $m > 1$ $p \wedge q$ 真: $2 \leq m < 3$

于是解 m 的范围 $1 < m < 2$ 或 $m \geq 3$

20 解 (1) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 则

$$y_1^2 = 8x_1, y_2^2 = 8x_2, (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 8(x_1 - x_2), k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{8}{y_1 + y_2} = \frac{8}{2} = 4$$

弦 AB 所在的直线方程 $y - 1 = 4(x - 2), y = 4x - 7$

(2) 设 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, $OA \perp OB$,

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0, x_1 = \frac{y_1^2}{8}, x_2 = \frac{y_2^2}{8}, \text{ 于是 } \frac{y_1^2 y_2^2}{64} + y_1 y_2 = 0, y_1 y_2 = -64$$

由 $\begin{cases} x = 2y + m \\ y^2 = 8x \end{cases}$ 消去 x 得 $y^2 - 16y - 8m = 0$, 得 $y_1 + y_2 = 16, y_1 y_2 = -8m = -64, m = 8$

设 $Q(x_0, y_0)$, 则 $y_0 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = 8, x_0 = 2y_0 + m = 24$, 于是 $Q(24, 8)$

21、解(1) 圆 C 的半径 $r = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$

圆 C 的方程 $x^2 + y^2 = 4$

(2) 设 $M(x, y), P(x_0, y_0)$, 故 $x_0^2 + y_0^2 = 4$

由于 $PB \perp x$ 轴于 B $\vec{BM} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{BP}$, 于是 $x = x_0, y = \frac{\sqrt{3}}{2} y_0$

$x_0 = x, y_0 = \frac{2}{\sqrt{3}} y$, 因此 $x^2 + \frac{4y^2}{3} = 4$, 曲线 E: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$,

(3) 右顶点 $M(2, 0)$, 依题意

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 0, \text{ 故 } (x_1 - 2)(x_2 - 2) + y_1 y_2 = 0$$

$$\text{联立 } \begin{cases} y = kx + m \\ 3x^2 + 4y^2 = 12 \end{cases} \text{ 消 } y \text{ 得 } (4k^2 + 3)x^2 + 8kmx + 4m^2 - 12 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{8km}{4k^2 + 3}, x_1 x_2 = \frac{4m^2 - 12}{4k^2 + 3},$$

$$(x_1 - 2)(x_2 - 2) = x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 = \frac{4m^2 - 12}{4k^2 + 3} + \frac{16km}{4k^2 + 3} + 4 = \frac{16k^2 + 16km + 4m^2}{4k^2 + 3}$$

$$y_1 y_2 = (kx_1 + m)(kx_2 + m) = k^2 x_1 x_2 + km(x_1 + x_2) + m^2 = \frac{4k^2 m^2 - 12k^2}{4k^2 + 3} - \frac{8k^2 m^2}{4k^2 + 3} + m^2 = \frac{3m^2 - 12k^2}{4k^2 + 3}$$

$$\frac{4k^2 + 16km + 7m^2}{4k^2 + 3} = 0, 4k^2 + 16km + 7m^2 = 0, (2k + m)(2k + 7m) = 0, k = -\frac{1}{2}m \text{ 或 } k = -\frac{7}{2}m$$

当 $k = -\frac{1}{2}m$ 时, $l: y = -\frac{1}{2}mx + m = -\frac{1}{2}m(x - 2)$ 过右顶点舍去

当 $k = -\frac{7}{2}m$ 时, $l: y = -\frac{7}{2}mx + m = -\frac{7}{2}m(x - \frac{2}{7})$ 过定点 $(\frac{2}{7}, 0)$, 此时 $\Delta > 0$

综上直线 l 过定点 $(\frac{2}{7}, 0)$