第七节 向量的运算与行列式

一、行列式

1、二阶行列式

设二阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，则称 $ad-bc$ 为矩阵 A 的行列式，记作 $|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$

或 $\det A=ad-bc$

例 1、计算(1) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}$

解：(1) $\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=35-12=23$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}=7-(-12)=19$

2、三阶行列式

设三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$，

则 A 的行列式 $\det A=|\mathrm{A}|=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

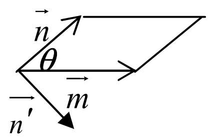
例、计算 2.(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}$

解：(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+1\times\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=1\times 2-2\times 0+1\times(-1)=1$

(2) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 6 \end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 6 \end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=1\times 0-2\times 3+3\times 2=0$

二、平行四边形的面积

以 $\vec{m}=(a,b),\vec{n}=(c,d)$ 与为邻边的平行四边形的面积



$S=\left||\vec{m}||\vec{n}|\sin\theta\right|=\left||\vec{m}||\vec{n}|\cos(90^0-\theta)\right|$

作向量 $\vec{n}'\perp\vec{n}$，使 $|\vec{n}'|=|\vec{n}|$，则 $\vec{n}'=(-d,c)$

于是 $S=\left||\vec{m}||\vec{n}'|\cos(90^0-\theta)\right|=\left|\vec{m}\bullet\vec{n}'\right|=|ad-bc|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的绝对值

$=\left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|=\left|\det\begin{pmatrix} \vec{m} \\ \vec{n} \end{pmatrix}\right|$

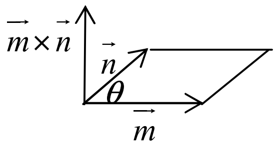
三、向量的叉乘

1、向量的叉乘是三维向量的特有运算,$\vec{m}\times\vec{n}$定义为:

(1)大小(模)为：$|\vec{m}||\vec{n}|\sin\theta$是平行四边形的面积

(2)方向垂直于$\vec{m},\vec{n}$确定的平面按右手系($\vec{m}$前$\vec{n}$后)

2、向量的叉乘满足结合律分配律



3、设$\vec{m}=(a_1,b_1,c_1),\vec{n}=(a_2,b_2,c_2)$

因为$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0},\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\vec{k}\times\vec{i}=\vec{j},$

所以$\vec{m}\times\vec{n}=(a_1\vec{i}+b_1\vec{j}+c_1\vec{k})\times(a_2\vec{i}+b_2\vec{j}+c_2\vec{k})$

$=(b_1c_2-b_2c_1)\vec{i}-(a_1c_2-a_2c_1)\vec{j}+(a_1b_2-a_2c_1)\vec{k}$

$$=\vec{i}\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & \vec{i}\\ b_1 & b_2 & \vec{j}\\ c_1 & c_2 & \vec{k}\end{vmatrix}$$

4、混合积

设$\vec{m}=(a_1,b_1,c_1),\vec{n}=(a_2,b_2,c_2),\vec{p}=(a_3,b_3,c_3)$，则

$$(\vec{m}\times\vec{n})\bullet\vec{p}=\left(\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\right)\bullet(a_3,b_3,c_3)$$

$$=a_3\begin{vmatrix}b_1 & c_1\\ b_2 & c_2\end{vmatrix}-b_3\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}+c_3\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$$

由行列式的性质可得$(\vec{m}\times\vec{n})\bullet\vec{p}=(\vec{n}\times\vec{p})\bullet\vec{m}=\vec{p}\bullet(\vec{m}\times\vec{n})=-(\vec{n}\times\vec{m})\bullet\vec{p}$

5、平行六面体的体积

以$\vec{m}=(a_1,b_1,c_1),\vec{n}=(a_2,b_2,c_2),\vec{p}=(a_3,b_3,c_3)$为同一顶点的三条棱构成平行六面体

设$\vec{m}\times\vec{n}$方向的单位向量为$\hat{t}$，则

$(\vec{m}\times\vec{n})\bullet\vec{p}=|\vec{m}||\vec{n}|\sin\theta(\vec{t}\bullet\vec{p})$，$|\vec{m}||\vec{n}|\sin\theta$是底面积，$\vec{t}\bullet\vec{p}$是$\vec{p}$在$\hat{t}$方向上的射影

于是，平行六面体的体积$V=|(\vec{m}\times\vec{n})\bullet\vec{p}|=\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}$的绝对值

$$==\left|\det\begin{pmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\right|=\left|\det\begin{pmatrix}\vec{m}\\ \vec{n}\\ \vec{p}\end{pmatrix}\right|$$