

第三节 极坐标

一、极坐标的认识

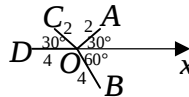
引例、小张从 O 点出发向东偏北 60 度的方向走 120m 到 A 点，小李从 O 点出发向北偏西 30 度的方向走 90m 到 B 点，作出图形

可见由距离与角可确定位置

1、定义：在平面上取一点定点 O 叫做极点，自极点 O 引一条射线 Ox 叫极轴；再选定长度单位、角度单位、正角方向，就建立了一个极坐标系

2、极坐标：若 $|MO| = r$ ，以极轴为始边，OM 为终边的角为 q ，则有序数对 (r, q) 叫做点 M 的极坐标，记为 $M(r, q)$ 。

例 1、在极坐标系中，如图，写出 A, B, C, D 的一个极坐标



3、若 A 点的一个极坐标是 (r, q) ，则 $(r, q + 2kp), k \in \mathbb{Z}$ 都是 A 点的极坐标

4、当 $r < 0$ 时， (r, q) 叫异常极坐标，表示的点与 $(-r, q)$ 关于极点对称点

例 2、在极坐标系中，给出极坐标描出点 $A(1, \frac{p}{6}), B(2, -\frac{p}{3}), B(2, \frac{4p}{3}), D(-2, -\frac{p}{3})$

5、在直角坐标系中，以 Ox 为极轴得到坐系

设 M 点的直角坐标为 $M(x, y)$ ， $M(r, q)$ ，则 $\begin{cases} x = r \cos q \\ y = r \sin q \end{cases}$ ， $\begin{cases} r^2 = x^2 + y^2 \\ \tan q = \frac{y}{x} \end{cases}$

例 3、将 M 点的极坐标 $(2, -\frac{p}{3})$ 化为直角坐标

解：Q $r = 2, q = -\frac{p}{3}$,

$$\therefore x = r \cos q = 2 \cos(-\frac{p}{3}) = 1,$$

$$y = r \sin q = 2 \sin(-\frac{p}{3}) = -\sqrt{3}$$

例 4、将 M 点的直角坐标 $(-\sqrt{3}, -1)$ 化为极坐标坐标

解：Q $x = -\sqrt{3}, y = -1$

$$\therefore r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2, \tan q = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

q 是第三象限角， $\therefore q = p + \frac{p}{6} = \frac{7p}{6}$

M 点极坐标坐标为 $(2, \frac{7p}{6})$

例 5、将 A, B 点的极坐标 $(2, -\frac{p}{3}), (1, \frac{p}{3})$ ，求 $|AB|$

解 1、A, B 的直角坐标 $(1, -\sqrt{3}), (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ ，于是 $|AB| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + (\frac{3\sqrt{3}}{2})^2} = \sqrt{7}$

解 2、 $|AB|^2 = |OA|^2 + |OB|^2 - 2|OA||OB|\cos \angle AOB = 1 + 4 - 2 \times 1 \times 2 \cos \frac{2p}{3} = 7$

于是 $|AB| = \sqrt{7}$

例 6、在极坐标系中，已知两点 A, B 的极坐标分别是 $(2, \frac{p}{3}), (3, \frac{p}{6})$ ，求 DOAB 的面积

$$\text{解: } S_{\triangle OAB} = \frac{1}{2} |OA||OB| \sin \angle AOB = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{3}{2}$$

二、直线的极坐标方程

1、过极点倾斜角为 $\frac{p}{3}$ 直线方程 $q = \frac{p}{3}$ 或 $q = \frac{4p}{3} (r \neq 0)$ ，可写成 $q = \frac{p}{3} (r \in \mathbb{R})$

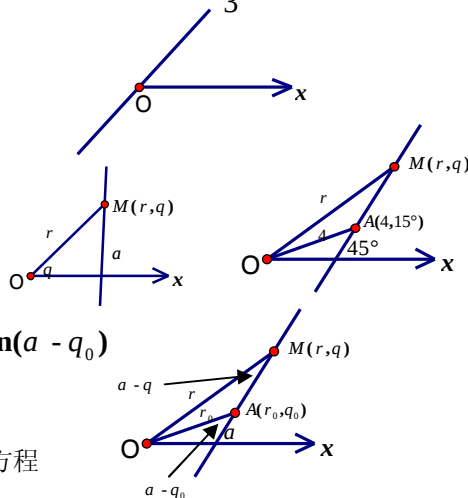
2、过 $A(4,0)$ 垂直于极轴的直线方程 $r \cos q = 4$

3、过点 $A(4, \frac{p}{12})$ 倾斜角为 45° 的直线方程为

$$\frac{r}{\sin \frac{p}{6}} = \frac{4}{\sin(\frac{p}{4} - q)}, \text{ 即 } r \sin(\frac{p}{4} - q) = 2$$

一般地，过点 $A(r_0, q_0)$ 倾斜角为 a 的直线方程为

$$\frac{r}{\sin(a - q_0)} = \frac{r_0}{\sin(a - q)}, \text{ 即 } r \sin(a - q) = r_0 \sin(a - q_0)$$



例 1、把极坐标方程 $r \cos(q - \frac{p}{4}) = 3$ 化为直角坐标方程

解： $r \cos(q - \frac{p}{4}) = 3$ ，化为 $\frac{\sqrt{2}}{2} r (\cos q + \sin q) = 3$ ，故直角坐标方程为

$$x + y = 3\sqrt{2}, \text{ 即 } x + y - 3\sqrt{2} = 0$$

例 2、求极点到直线 $r \sin(q - \frac{p}{6}) = 1$ 的距离

解：直线 $r \sin(q - \frac{p}{6}) = 1$ 化为 $r(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin q - \frac{1}{2} \cos q) = 1$ 故直角坐标方程为

$$\sqrt{3}y - x = 2, \text{ 即 } x - \sqrt{3}y + 2 = 0, \text{ 于是所求距离 } d = \frac{2}{\sqrt{1+3}} = 1$$

例 3、把下列直角坐标方程化为极坐标方程

$$(1) x = 2 \quad (2) x + y = 4 \quad (3) y = \sqrt{3}x$$

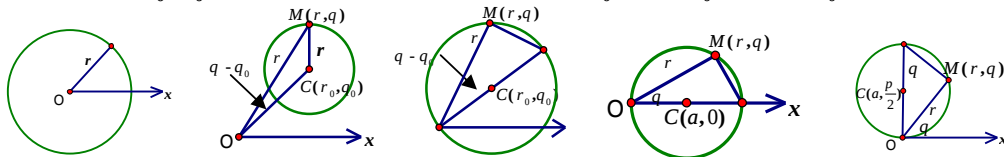
解：(1) $r \cos q = 2$ (2) $r \cos q + r \sin q = 4$ 即 $r \cos(q - \frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}$

$$(3) \tan q = \sqrt{3}, q = \frac{p}{3},$$

三、圆的极坐标方程

1、圆心在极点，半径为 r 的圆的方程 $r = r$

2、圆心是 $C(r_0, q_0)$ ，半径为 r 的圆的方程 $r^2 = r^2 + r_0^2 - 2rr_0 \cos(q - q_0)$



3、圆心是 $C(a, q_0)$ ，半径为 a 的圆的方程

$$a^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos(q - q_0)$$

$$r^2 = 2ar \cos(q - q_0), r = 0 \text{ 或 } r = 2a \cos(q - q_0) \text{ 即 } r = 2a \cos(q - q_0)$$

特殊情况:

(1) 圆心是 $C(a, 0)$, 半径为 a 的圆的方程 $r = 2a \cos q$

(2) 圆心是 $C(a, \frac{p}{2})$, 半径为 a 的圆的方程 $r = 2a \sin q$

例 1、将 $x^2 + y^2 - 2x = 0$ 化为极坐标方程

解: $r^2 - 2r \cos q = 0, r = 2 \cos q$

例 2、将极坐标方程 $r = 2 \cos(q + \frac{p}{4})$ 化为直角坐标方程, 并说出它表示的曲线

解: $r = \sqrt{2}(\cos q - \sin q), r^2 = \sqrt{2}(r \cos q - r \sin q)$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{2}x - \sqrt{2}y, x^2 + y^2 - \sqrt{2}x + \sqrt{2}y = 0$$

$$(x - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (y + \frac{\sqrt{2}}{2})^2 = 1 \text{ 它表示的曲线是以 } (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \text{ 为圆心, } 1 \text{ 为半径的圆}$$

例 3、求曲线 $r = \sqrt{2} \cos(q - \frac{p}{4})$ 被直线 $q = \frac{p}{6}$ 截得的弦长

解 1: $r = \cos q + \sin q, r^2 = r \cos q + r \sin q$

$$x^2 + y^2 = x + y, x^2 + y^2 - x - y = 0$$

$$(x - \frac{1}{2})^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{2} \text{ 它表示的曲线是以 } (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ 为圆心, } \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 为半径的圆}$$

直线 $q = \frac{p}{6}$ 化为直角坐标方程 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$, 即 $x - \sqrt{3}y = 0$

$$\text{圆心 } (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \text{ 到直线 } x - \sqrt{3}y = 0 \text{ 的距离 } d = \frac{|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}|}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$$

$$\text{弦长} = 2\sqrt{r^2 - d^2} = 2\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{4 - 2\sqrt{3}}{16}} = 2\sqrt{\frac{4 + 2\sqrt{3}}{16}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

解 2: 曲线 $r = \sqrt{2} \cos(q - \frac{p}{4})$ 过点 $(0, \frac{3p}{4})$, $(0, \frac{p}{4})$ 为极点, 直线 $q = \frac{p}{6}$ 也过极点

当 $q = \frac{p}{6}$ 时, $r = \sqrt{2} \cos(\frac{p}{6} - \frac{p}{4}) = \sqrt{2} \cos \frac{p}{12} = \sqrt{2} \times \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$, 于是弦长 $\frac{\sqrt{3} + 1}{2}$

例 4、动点 M 在曲线 $r = 2a \sin q$ 上, $\vec{MP} = 2\vec{OM}$, 求动点 P 的轨迹方程

解: 设 $M(r_0, q_0), P(r, q), \vec{MP} = 2\vec{OM}, \vec{OP} = 3\vec{OM}$

故 $r = 3r_0, q = q_0, r_0 = 2a \sin q_0, \frac{r}{3} = 2a \sin q$, 即 $r = 6a \sin q$ 为点 P 的轨迹方程

四、圆柱坐标与球面坐标

1、圆柱坐标: 在空间直角坐标系中, $M(x, y, z)$, 把 (x, y) 化为极坐标得 (r, q) , 有序数组

$$(r, q, z) \text{ 叫做 } M \text{ 点的圆柱坐标. 转化公式 } \begin{cases} x = r \cos q \\ y = r \sin q \\ z = z \end{cases}$$

例 1、把 $M(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ 化为柱坐标

解: 把 $(1, \sqrt{3})$ 化为极坐标 $(2, \frac{p}{3})$, 于是柱坐标是 $(2, \frac{p}{3}, 2\sqrt{3})$

例 2、点 M 的柱坐标 $(4, \frac{p}{3}, 8)$ ，求 M 的直角坐标

解： $(4, \frac{p}{3})$ 的直角坐标是 $(2, 2\sqrt{3})$ ，M 的直角坐标 $(2, 2\sqrt{3}, 8)$

2、球面坐标：在空间直角坐标系中 $M(x, y, z)$ ， $|MO| = r$ ，射线 Oz 与射线 OM 的夹角 j ，Ox 逆时针转到 OM 的最小正角为 q ，则有序数组 (r, j, q) ($0 \leq j \leq p, 0 \leq q < 2p$) 叫做 M

点的球面坐标。转化公式 $\begin{cases} x = r \sin j \cos q \\ y = r \sin j \sin q \\ z = r \cos j \end{cases}$ ， $\frac{y}{x} = \tan q$

例 1、点 A 直角坐标是 $(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$ ，求点 A 的球坐标

解： $r = \sqrt{1+3+12} = 4$ ， $\cos j = \frac{z}{r} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ， $0 \leq j \leq p, j = \frac{p}{3}$

$\tan q = \frac{y}{x} = \sqrt{3}$ ， q 是第一象限角， $q = \frac{p}{3}$

于是 A 的球坐标是 $(4, \frac{p}{6}, \frac{p}{3})$

例 2、点 A 球坐标 $A(2, \frac{p}{4}, \frac{p}{3})$ ，求点 A 的直角坐标

解： $\begin{cases} x = 2 \sin \frac{p}{4} \cos \frac{p}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = 2 \sin \frac{p}{4} \sin \frac{p}{3} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ z = 2 \cos \frac{p}{4} = \sqrt{2} \end{cases}$ ，故点 A 的直角坐标为 $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}, \sqrt{2})$