第五节 不等式

一、均值不等式

复习:

1、若 $a,b\in R$，则 $a^2+b^2\ge 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时取“=”号

2、若 $a,b\in R^+$，则 $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时取“=”号

变形 1、$a+b\ge 2\sqrt{ab}$，变形 2、$ab\le(\dfrac{a+b}{2})^2$

1、若 $a,b,c\in R^+$，则 $a^3+b^3+c^3\ge 3abc$，当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号

证明：$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3+c^3-3a^2b-3ab^2-3abc$

$=(a+b+c)[(a+b)^2-c(a+b)+c^2]-3ab(a+b+c)$

$=(a+b+c)[a^2+b^2+c^2-ab-bc-ac]$

$=\dfrac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]\ge 0$

$\therefore a^3+b^3+c^3\ge 3abc$, 当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号

2、若 $a,b,c\in R^+$，则 $\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$，当且仅当 $a=b=c$ 时取“=”号

证明：$a+b+c=(\sqrt[3]{a})^3+(\sqrt[3]{b})^3+(\sqrt[3]{c})^3\ge 3\sqrt[3]{abc},\dfrac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}$

例 1、若 a,b,c 为正实数且满足 $a+2b+3c=6$，求 abc 的最大值;

解 $\because 6=a+2b+3c\ge 3\sqrt[3]{a\cdot 2b\cdot 3c}\quad\therefore abc\le\dfrac{4}{3}$

当且仅当 $a=2b=3c$ 即 $a=2,b=1,c=\dfrac{2}{3}$ 时等号成立。所以 abc 的最大值为 $\dfrac{4}{3}$

例 2、求 $y=x+\dfrac{4}{x^2}(x>0)$ 的最小值

解：$y=x+\dfrac{4}{x^2}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{x}{2}+\dfrac{4}{x^2}\ge 3\sqrt[3]{1}=3$

当且仅当 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{x}{2}=\dfrac{4}{x^2}$ 上式取等号，于是当 $x=2$ 时，$y_{\min}=3$

3、n 元均值不等式

设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数，则，$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$，当且仅当

$a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时上式取“＝”号

先证引理：若 $b_i\in R_+(i=1,2,\cdots,n)$，$b_1b_2\cdots b_n=1$，则 $b_1+b_2+\cdots+b_n\ge n$，当且仅当 $b_1=b_2=\cdots=b_n=1$ 时“＝”成立

证明：当 $n=1$ 时显然

假设当 $n=k$ 时若 $b_1b_2\cdots b_k=1$ 时，都有 $b_1+b_2+\cdots+b_k\ge k$，当且仅当 $b_1=b_2=\cdots=b_k=1$ 时“＝”成立

则当 $n=k+1$ 时，因 $b_1b_2b_3\cdots b_kb_{k+1}=1$ 于是在 $b_1,b_2,\cdots,b_k,b_{k+1}$ 不可能全大于 1，也不可能全小于 1

于是总有一个大于或等于 1，另一个小于或等于 1

不妨设 $b_1\ge 1,b_2\le 1$，因为 $(b_1b_2)b_3\cdots b_kb_{k+1}=b_1b_2b_3\cdots b_kb_{k+1}=1$

由归纳法假设 $b_1b_2+b_3\cdots+b_{k+1}\ge k$

故 $b_1+b_2+b_3\cdots+b_k+b_{k+1}=b_1b_2+b_3\cdots+b_k+b_{k+1}+b_1+b_2-b_1b_2$

$\ge k+b_1(1-b_2)+b_2=k+1+b_1(1-b_2)+b_2-1=k+1+(1-b_2)(b_1-1)\ge k+1$

当且仅当 $b_1=b_2=b_1b_2=b_3\cdots=b_{k+1}=1$ 时"="成立，故引理成立

再证定理

设 $b_i=\dfrac{a_i}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}$，则 $b_1b_2\cdots b_n=1$，由引理得

$b_1+b_2+\cdots+b_n\ge n$，即 $\dfrac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}+\dfrac{a_2}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}+\cdots+\dfrac{a_1}{\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}}\ge n$

故 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$

公式的使用:套用,凑用,变用

二、柯西不等式

1、二元柯西不等式：

$|\vec{a}\bullet\vec{b}|\le|\vec{a}||\vec{b}|$，当且仅当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 共线时取等号

设 $\vec{a}=(a,b),\vec{b}=(c,d)$，则 $\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}\le|ac+bd|$

即 $(a^2+b^2)(c^2+d^2)\ge(ab+cd)^2$，当且仅当 $\dfrac{a}{c}=\dfrac{b}{d}$ 时取等号

口决：方和方和积,大(等于)积和方

证法 2：$(a^2+b^2)(c^2+d^2)-(ab+cd)^2=(ac-bd)^2\ge 0$

例、已知 $4x^2+y^2=40$，求 $z=6x-y$ 的范围

解：$(6x-y)^2=[3\times 2x+(-1)y]^2=[3^2+(-1)^2]\times[(2x)^2+y^2]^2=10\times 40$

$-20\le 6x-y\le 20$

当且仅当 $x=3,y=-2$ 时，$z_{\max}=20$，$x=-3,y=2$ 时时，$z_{\min}=-20$

因此 z 的取值范围是 $[-20,20]$.

2、 三元柯西不等式：设非零向量 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3),\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

$|a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3|\le\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)}$

$(a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3)^2$

当且仅当 $\dfrac{a_1}{a_2}=\dfrac{b_1}{b_2}=\dfrac{c_1}{c_2}$ 时取等号

例 1、已知 $2x+y+2z=21$,求 $z=4x^2+4y^2+z^2$ 的最小值

解: $[(2x)^2+(2y)^2+z^2][1^2+(\dfrac{1}{2})^2+2^2]\ge(2x+y+2z)^2=21^2$

$4x^2+4y^2+z^2\ge 84$

当且仅当 $2x=4y=\dfrac{z}{2}$ 时取”=”

故 $x=2,y=1,z=8$ 时 $4x^2+4y^2+z^2{}_{\min}=84$

例 2、若 $a^2+2b^2+3c^2=1$，求 $a+2b+3c$ 的取值范围.

解:因 $(a+2b+3c)^2\le(1^2+\sqrt{2}^2+\sqrt{3}^2)[a^2+(\sqrt{2}b)^2+(\sqrt{3}c)^2]=6$，

所以 $-\sqrt{6}\le a+2b+3c\le\sqrt{6}$，

当且仅当 $a=b=c=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时，取得最大值 $\sqrt{6}$， $a=b=c=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ 时，取得最小值 $-\sqrt{6}$，

因此 $a+2b+3c$ 的取值范围是 $[-\sqrt{6},\sqrt{6}]$.

例 3、求证：已知 a，b，c 为非零实数, $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{9}{c^2}\geqslant\dfrac{36}{a^2+b^2+c^2}$；

求证：$[(\dfrac{1}{a})^2+(\dfrac{2}{b})^2+(\dfrac{3}{c})^2](a^2+b^2+c^2)\ge(\dfrac{1}{a}\cdot a+\dfrac{2}{b}\cdot b+\dfrac{3}{c}\cdot c)^2$

$[(\dfrac{1}{a})^2+(\dfrac{2}{b})^2+(\dfrac{3}{c})^2](a^2+b^2+c^2)\ge 36\therefore\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{4}{b^2}+\dfrac{9}{c^2}\geqslant\dfrac{36}{a^2+b^2+c^2}$

例 4、若 x,y，$z\in R^+$， $x+y+z=12$，求 $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z}$ 最小值

解: $(x+y+z)(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z})\ge(1+1+2)^2=16$，$12(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z})\ge 16$,故 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{4}{z}\ge\dfrac{4}{3}$

当且仅当 $x^2=y^2=\dfrac{z^2}{4}$ 即 $x=3,y=3,z=6$ 时, $z_{\min}=\dfrac{4}{3}$

例 5、求函数 $f(x)=2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}$ 的最大值

解：由柯西不等式得 $(2\sqrt{x}+\sqrt{5-x})^2\le(2^2+1^2)[\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{5-x}\right)^2]=25$，

所以 $f(x)=2\sqrt{x}+\sqrt{5-x}\le 5$.

当且仅当 $\dfrac{\sqrt{x}}{2}=\dfrac{\sqrt{5-x}}{1}$，即 $x=4$ 时，等号成立.

例 6、函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{1-x^2}$ $(-1<x<1,\text{且 } x\neq 0)$．求 $f(x)$ 的最小值

解:因为 $-1<x<1$，且 $x\neq 0$，所以 $1-x^2>0$，由柯西不等式 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{4}{1-x^2}$

$$=[x^2+(1-x^2)]\cdot(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{1-x^2})\geq[x\cdot\frac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}]^2=9,$$

当且仅当 $\dfrac{x}{\frac{1}{x}}=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}$，即 $x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 时取等号，$\therefore$ $f(x)$ 的最小值为 9

3、n 元均值不等式.

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leq(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)$$

特例、 $a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2\geq\dfrac{(a_1+a_2+\cdots a_n)^2}{n}$

证法 1：因为 $(a_1x-b_1)^2+(a_2x-b_2)^2+\cdots+(a_nx-b_n)^2\geq 0$ 对 $x\in R$ 恒成立

即 $(a_1{}^2+a_2{}^2\cdots+a_n{}^2)x^2-2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1{}^2+b_2{}^2\cdots+b_n{}^2)\geq 0$

对 $x\in R$ 恒成立，于是

$$\Delta=4(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2-4(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)\leq 0$$

所以 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leq(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)$

证法 2：

设 $\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$， $\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$， 则

$$\cos\langle\vec{a},\vec{b}\rangle=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2}\sqrt{(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2}}\leq 1$$

所以 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leq(a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+b_n{}^2)$

三、绝对值不等式

1、解绝对值不等式

①$|x|<a(a>0)\Leftrightarrow -a<x<a$，$|x|>a(a>0)\Leftrightarrow x<-a,\text{或}x>a$

例 1、解不等式(1)$|3x-1|\leq 2$ (2)$|3x-1|\leq 2$ (3) $|2t-4|\leq t+2$

例 2、解不等式

(1) $|x-1|+|x-3|<5$ (2) $|x+1|+|2x-3|>6$

例 3、已知不等式 $|x+2|+|x-m|\leq 3$ 的解集为 $\{x|-2\leq x\leq 1\}$．

解不等式 $|x-m|+|x-3|>5$

解：依题意，当 $x=1$ 时不等式成立，所以 $3+|1-m|\leq 3$，解得 $m=1$，经检验， $m=1$ 符合题意.

不等式 $|x-m|+|x-3|>5$ 化为 $|x-1|+|x-3|>5$

当 $x<-2$ 时，$-(x-1)-(x+2)\geq 5$， $x\leq -3$，此时 $x\leq -3$

当 $-2\leq x\leq 1$ 时，$-(x-1)+(x+2)\geq 5$， $3\geq 5$，此时无解

当 $x>1$ 时，$(x-1)+(x+2)\geq 5$， $x\geq 2$，此时 $x\geq 2$

综上，原不等式的解集是 $(-\infty,-3]\cup[2,+\infty)$

二、绝对值不等式

1、 $|a|+|b| \geq |a+b|$，当仅当 $ab \geq 0$ 时取等号

2 、$|a|+|b| \geq |a-b|$，当仅当 $ab \leq 0$ 时取等号

3 、 $|a+b| \geq |a|-|b| \; (|a| \geq |b|)$，当仅当 $ab \leq 0$ 时取等号

4 、$|a-b| \geq |a|-|b| \; (|a| \geq |b|)$

例 1、若函数 $f(x)=|x-3|$ 图象恒在函数 $g(x)=-|x+4|+m$ 图象的上方，求实数 m 的取值范围.

解:因函数 $f(x)$ 的图象恒在 $g(x)$ 上方

故 $f(x)>g(x)$ 对 $x \in R$ 恒成立，$|x-3|>-|x+4|+m, |x-3|+|x+4|>m$ 对 $x \in R$ 恒成立

$|x-3|+|x+4| \geq |(x-3)-(x+4)|=7$, 当且仅当 $(x-3)(x+4) \leq 0, -4 \leq x \leq 3$ 时取等号

于是 $|x-3|+|x+4|_{\min}=7$, m 的取值范围是 $m<7$

例 2、已知 $|x-a|<h$，$|y-a|<h$，求证：$|x-y|<2h$

例 3、知函数 $f(x)=|x-3|-2$， $g(x)=-|x+1|+4$.

若不等式 $f(x)-g(x) \geq m+1$ 的解集为 **R**，求 m 的取值范围.

解: $f(x)-g(x)=|x-3|+|x+1|-6$，

因为对于 $\forall x \in \mathbf{R}$， $f(x)-g(x)=|x-3|+|x+1|-6=|3-x|+|x+1|-6$

$\geq |(3-x)+(x+1)|-6=4-6=-2$.

于是有 $m+1 \leq -2$，得 $m \leq -3$，即 m 的取值范围是 $(-\infty,-3]$