第五节 广义积分

一、无穷区间上的广义积分

1 、设函数 $f(x)$ 在区间$[a,+\infty)$上连续，取$b>a$，若 $\lim\limits_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=A$，则称 A 为函数 $f(x)$ 在区间$[a,+\infty)$上的广义积分，记作$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=A$，.也称广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ **收敛**；如果上述极限不存在，则称函数 $f(x)$ 在无穷区间$[a,+\infty)$上的广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 不存在或**发散**，这时记号$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 不再表示数值.

类似地

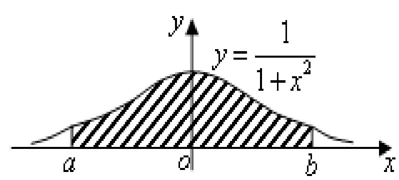
2、$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，

3、$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_c^b f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{c} f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$

注 由于上述结果与常数c无关，因此若取$c=0$，则可使计算过程简便些.

以上三种广义积分统称为无穷区间上的广义积分．为方便起见，以下把广义积分的收敛性和发散性统称为**敛散性**.

例 1 讨论下列广义积分的敛散性，若收敛则计算出广义积分的值：



(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$；　　　　(2) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$.

解(1) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=\lim\limits_{a\to-\infty}\int_a^0\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x+\lim\limits_{b\to+\infty}\int_0^b\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$

$=\lim\limits_{a\to-\infty}\arctan x\Big|_a^0+\lim\limits_{b\to+\infty}\arctan x\Big|_0^b$

$=-\lim\limits_{a\to-\infty}\arctan a+\lim\limits_{b\to+\infty}\arctan b=-(-\dfrac{p}{2})+\dfrac{p}{2}=p$.

所以$\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 收敛,且其值为p． 此结果说明如图无界区域的面积为p．

(2) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x=\lim\limits_{b\to+\infty}\int_1^b\ln x\mathrm{d}\ln x=\lim\limits_{b\to+\infty}(\dfrac{1}{2}\ln^2 x)\Big|_1^b$

$=\lim\limits_{b\to+\infty}(\dfrac{1}{2}\ln^2 b-\dfrac{1}{2}\ln^2 1)=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{b\to+\infty}\ln^2 b=+\infty$，所以$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$ 发散.

为了计算的方便，记$F(+\infty)=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$，$F(-\infty)=\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$，

则广义积分的牛顿-莱布尼茨公式为：$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_a^{+\infty}=F(+\infty)-F(a)$，

$\int_{-\infty}^{b} f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{b}=F(b)-F(-\infty)$，　$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=F(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=F(+\infty)-F(-\infty)$.

例 2 、证明广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\,(a>0)$ 当 $p>1$ 时收敛；当 $p\le 1$ 时发散.

证 (1) 当 $p=1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln x\Big|_a^{+\infty}=+\infty$

(2) 当 $p\ne 1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\frac{x^{1-p}}{1-p}\Big|_a^{+\infty}=\begin{cases}+\infty, & p<1,\\ \frac{a^{1-p}}{p-1}, & p>1.\end{cases}$

综上：当 $p>1$ 时，$\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\frac{a^{1-p}}{p-1}\,(a>0)$；

当 $p\le 1$ 时，广义积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}\,(a>0)$ 发散.

注：这是个重要的广义积分，应记住其结论.

对于广义积分，也可利用分部积分法和换元法.

例 3 、判别广义积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-px}\mathrm{d}x$ (p 是大于零的常数)的敛散性.

解 ：$\int_0^{+\infty}xe^{-px}\mathrm{d}x=-\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}x\mathrm{d}e^{-px}=-\frac{1}{p}xe^{-px}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{p}\int_0^{+\infty}e^{-px}\mathrm{d}x$

$$=-\frac{1}{p}\lim_{x\to+\infty}xe^{-px}+\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p^2}.$$

所以广义积分 $\int_0^{+\infty}xe^{-px}\mathrm{d}x$ 收敛，且其值为 $\frac{1}{p^2}$.

例 4 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}\left(a>0\right)$.

解 作变量代换，令 $x=a\tan t$，则 $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\mathrm{d}t$，且当 $x=0$ 时 $t=0$,当 $x\to+\infty$ 时 $t\to\frac{p}{2}$，于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(x^2+a^2)^3}}=\int_0^{\frac{p}{2}}\frac{a\sec^2 t}{a^3\sec^3 t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{p}{2}}\cos t\mathrm{d}t=\frac{1}{a^2}\sin t\Big|_0^{\frac{p}{2}}=\frac{1}{a^2}.$$

二、无界函数的广义积分

1、如果函数 $f(x)$ 在点 x_0 的任一邻域内都无界，则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的**瑕点**(也称为**无界间断点**)．无界函数的广义积分也称为**瑕积分**．例如在 $y=\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ 中，$x=\pm a$ 就是此函数的**瑕点**

2、设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，点 a 为 $f(x)$ 的瑕点．取 $t>a$，如果极限

$\lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x = A$，则称 A 为函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上的广义积分，记作 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = A$，即 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to a^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 这时也称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果上述极限不存在，则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

类似地，

3、设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，点 b 为 $f(x)$ 的瑕点．取 $t<b$，如果极限 $\lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，则定义 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to b^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$，

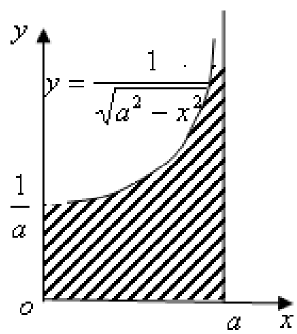
这时也称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

4、设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上除点 $c(a<c<b)$ 外连续，点 c 为 $f(x)$ 的瑕点．如果两个广义积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 都收敛，则定义

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{t\to c^-}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x + \lim_{t\to c^+}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$$

这时也称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；否则称广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散.

5、计算无界函数的广义积分，也可借助牛顿-莱布尼茨公式．设 $x=a$ 为函数 $f(x)$ 的瑕点，在区间 $(a,b]$ 上 $F'(x)=f(x)$，记 $F\left(a^+\right)=\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$，如果极限 $\lim\limits_{x\to a^+}F(x)$ 存在,则广义积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a^+}^{b} = F(b)-F(a^+)$.



例 1、 计算下列广义积分：

(1) $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}(a>0)$；　　　(2) $\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x$.

解 (1) 因为 $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^-}\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} = +\infty$，

所以点 $x=a$ 是函数 $f(x)$ 的瑕点，于是有

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a}\Big|_0^a = \lim_{x\to a^-}\arcsin\frac{x}{a} - 0 = \frac{p}{2}.$$

此结果表明图中阴影区域面积为 $\frac{p}{2}$.

(2) 因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = -\infty$，所以点 $x=0$ 是函数 $f(x)$ 的瑕点，于是有

$$\int_0^1 \ln x\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_{0^+}^1 - \int_0^1 x\mathrm{d}\ln x = 0 - \lim_{x\to 0^+}x\ln x - \int_0^1 \mathrm{d}x = -\lim_{x\to 0^+}x\ln x - 1 = -1.$$

例 2、 证明广义积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q}$ 当 $q<1$ 时收敛；当 $q\ge 1$ 时发散.

解 (1) 当 $q=1$ 时，$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^q} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x\Big|_{0^+}^1 = 0 - \lim\limits_{x\to 0^+}\ln x = +\infty$；

(2) 当 $q\neq1$ 时，$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^q}=\frac{x^{1-q}}{1-q}\Big|_{0^+}^{1}=\begin{cases}\frac{1}{1-q}, & q<1,\\ +\infty, & q>1.\end{cases}$

综上，当 $q<1$ 时广义积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^q}$ 收敛，且其值为 $\frac{1}{1-q}$；当 $q\geq1$ 时广义积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^q}$ 发散.

例 3、讨论积分 $\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 的敛散性.

解 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=+\infty$，所以点 $x=0$ 为被积函数 $\frac{1}{x^2}$ 的瑕点．由上例知 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散．故依定义知积分 $\int_{-1}^1\frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 发散.

注 由于瑕积分与定积分在形式上并无两样(均为有限区间上的定积分)，故当遇到积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 时，一定要检验被积函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上是否有瑕点，如果有就应按瑕积分计算，否则容易得到错误的结论

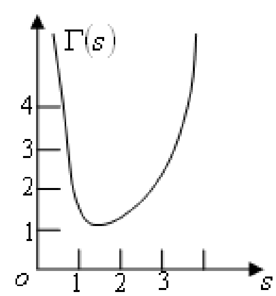
三、Γ 函数

本节简单介绍一下在概率论与数理统计中经常遇到的 Γ 函数.

广义积分 $\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x(s>0)$ 作为参变量 s 的函数称为 Γ **函数**，记作 $\Gamma(s)$，即

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x(s>0).$$

这个广义积分具有双重广义性．一方面,积分区间为无穷区间；而另一方面，当 $s-1<0$ 时 $x=0$ 是被积函数的瑕点．可以证明，当 $s>0$ 时 Γ 函数是收敛的．Γ 函数的图形如图.



Γ 函数的一些重要性质：

1、递推公式：$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)(s>0)$.

证 由分部积分法有

$$\Gamma(s+1)=\int_0^{+\infty}x^se^{-x}\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}x^s\mathrm{d}e^{-x}$$

$$=-e^{-x}x^s\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x^s$$

$$=0+s\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x=s\Gamma(s).$$ **证毕**.

显然，$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty}e^{-x}\mathrm{d}x=-e^{-x}\Big|_0^{+\infty}=1$．反复利用递推公式，有

$\Gamma(2)=\Gamma(1)=1$，$\Gamma(3)=2\Gamma(2)=2!$，$\Gamma(4)=3\Gamma(3)=3!$，……

一般地，对于任何正整数 n，有 $\Gamma(n+1)=n!$，所以我们可以把 Γ 函数看成是阶乘的推广.

例 计算广义积分 $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x}\mathrm{d}x$.

解 这里 $s=5$，所以 $\int_0^{+\infty} x^4 e^{-x}\mathrm{d}x=\Gamma(5)=4!=24$.

2、$\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^t\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1+t}{2}\right)(t>-1)$.

证 在 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty} x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x$ 中，作变量替换：$x=u^2$，有 $\Gamma(s)=2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^{2s-1}\mathrm{d}u$

再令 $2s-1=t$ 或 $s=\frac{1+t}{2}$，即有 $\int_0^{+\infty} e^{-u^2}u^t\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1+t}{2})(t>-1)$. **证毕**.

上式左端是概率论与数理统计中常用的积分，结果表明它的值可以用 Γ 函数来计算.

3、 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (可在以后学习)

证明 在区域 $D_R=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le R^2, x\ge 0, y\ge 0\}$ 中，

$\iint\limits_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^R e^{-r^2}rdr=\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$，于是 $\lim\limits_{R\to+\infty}\iint\limits_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\frac{\pi}{4}$

故当 $D=[0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 时，$\iint\limits_{D} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\frac{\pi}{4}$

又 $(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx)^2=\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx\int_0^{+\infty} e^{-y^2}dy=\iint\limits_{D} e^{-(x^2+y^2)}d\sigma=\frac{\pi}{4}$，

于是 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$，$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

对于 $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$ (正态密度)，换元 $y=\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}$ 得 $\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx=1$

令 $t=x^2$，于是 $\Gamma(1/2)=\int_0^{\infty} t^{-1/2}e^{-t}dt=\int_0^{\infty} 2e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

$$\Gamma(3/2)=(1/2)\Gamma(1/2)=\sqrt{\pi}/2$$

$$\Gamma(5/2)=(3/2)\Gamma(3/2)=3\sqrt{\pi}/4$$

$$\Gamma(\frac{n+1}{2})=\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{(n-1)!!}{2^{\frac{n}{2}}}$$