第八节复数

一、复数的认识

（引入：自然数的全体构成自然数集 N.

整数集 **Z**， **N**$\subsetneqq$**Z**

有理数集 **Q**.显然 **N**$\subsetneqq$**Z**$\subsetneqq$**Q**.

实数集 **R**

实数集 **R** 以后，像 $x^2=-1$ 这样的方程还是无解的，因为没有一个实数的平方等于－1，由于解方程的需要，人们引入了一个新数 i，叫做虚数单位。）

1、虚数单位 i

① $i^2=-1$；②实数可以与 i 进行四则运算，并且原有加、乘运算律仍然成立.

2、复数**的概念**

（1）复数：形如 $a+bi(a,b\in R)$ 的数叫复数，a 叫复数的实部，b 叫复数的虚部.

（2）实数、虚数、纯虚数

设复数 $z=a+bi(a,b\in R)$，

①当且仅当 $b=0$ 时，复数 $z=a$ 实数

②当 $b\neq0$ 时，复数 $z=a+bi$ 叫做虚数；

③当 $b\neq0$ 且 $a=0$ 时，$z=bi$ 叫做纯虚数；

3、复数集：全体复数所成的集合叫做复数集，用字母 C 表示.

4、数集关系：$N^+\subsetneqq$**N**$\subsetneqq$**Z**$\subsetneqq$**Q**$\subsetneqq R\subsetneqq C$

数的扩充

自然数集 N$\rightarrow$整数集 Z

$\uparrow$

正整数集 $N_+\xrightarrow[\text{引入小数（或分数）}]{\text{进行不整除除法}}$正有理数集 $Q_+\xrightarrow[\text{引入负有理数I加入0}]{\text{小减去大}}$有理数集 Q

$\xrightarrow[\text{引入无理数}]{\text{开不尽方}}$实数集 R$\xrightarrow[\text{引入虚数}]{\text{负数开方}}$复数集 C

例 1、请说出复数 $2+3i,-3+\dfrac{1}{2}i,-\dfrac{1}{3}i,-\sqrt{3}-\sqrt{5}i$ 的实部和虚部，有没有纯虚数？

例 2 实数 m 取什么数值时，复数 $z=m+1+(m-1)i$ 是:

(1)实数？ (2)虚数？ (3)纯虚数？

5、**复数的相等**

（1）定义：如果两个复数的实部和虚部分别相等，那么我们就说这两个复数相等

（2）复数相等的充要条件：若 a，b，c，$d\in$**R**，则 $a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c$，$b=d$.

例 已知 $(2x-1)+i=y-(3-y)i$，其中 x，$y\in$**R**，求 x 与 y.

解：根据复数相等的定义，得方程组 $\begin{cases}2x-1=y,\\1=-(3-y)\end{cases}$，所以 $x=\dfrac{5}{2}$，$y=4$.

6、复平面、实虚轴：

（1）复数与点对应，设 $z=a+bi(a、b\in \mathbf{R})$，则

复数 $z=a+bi \leftrightarrow$ 有序实数对$(a，b) \leftrightarrow$ 坐标平面内的点 $Z(a，b)$

（2）复平面：建立了直角坐标系用来表示复数的平面叫做复平面，

(3) 实虚轴：x 轴叫做实轴，y 轴叫做虚轴.

实轴上的点都表示实数，对于虚轴上的点要除原点外都表示纯虚数.

(4) 复数与复平面内的点一一对应

（5）两个复数，若不全是实数，则不能比较大小.

二、复数的代数形式

1、**复数** $z=a+bi(a,b\in R)$ 叫做**代数形式**

2、加法：$z_1+z_2=(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i$.

3、减法：$z_1-z_2=(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i$.

4、)乘法： $(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(bc+ad)i$.

5、平方公式 $(a+bi)^2=a^2-b^2+2abi$，$(1+i)^2=2i$，$(1-i)^2=-2i$

6、和差相乘 $(a+bi)(a-bi)=a^2+b^2$

7、i 的周期性 $i^{4n+1}=i$，$i^{4n+2}=-1$， $i^{4n+3}=-i$， $i^{4n}=1$

8、除法：$\dfrac{a+bi}{c+di}=\dfrac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}=\dfrac{[ac+bi\cdot(-di)]+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i$$

例 1、计算(1-2i)(3+4i)(-2+i)

解：原式＝(11-2i) (-2+i)= -20+15i.

例 2、(1-2i) $(-2+i)^2$

例 3、计算 $(1+2i)\div(3-4i)$.

解：$\dfrac{1+2i}{3-4i}=\dfrac{(1+2i)(3+4i)}{3^2+4^2}=\dfrac{-5+10i}{25}=\dfrac{-1+2i}{5}$

例 4、计算 $i+i^2+i^3+i^4$

解：$i+i^2+i^3+i^4=i-1-i+1=0$

例 5、计算 $\dfrac{(1-4i)(1+i)+2+4i}{3+4i}$

解：$\dfrac{(1-4i)(1+i)+2+4i}{3+4i}=\dfrac{5-3i+2+4i}{3+4i}=\dfrac{7+i}{3+4i}=\dfrac{(7+i)(3-4i)}{3^2+4^2}$

$=\dfrac{25-25i}{25}=1-i$

例 6.、计算 $(\frac{1+i}{1-i})^{2005}$

解：$(\frac{1+i}{1-i})^{2005}=(\frac{2i}{2})^{2005}=i^{2005}=i$

例 7、若 $z_1=a+2i$，$z_2=3-4i$，且 $\frac{z_1}{z_2}$ 为纯虚数，求实数 a 的值

9、复数的几何意:复数与点对应复数 $z=a+bi \xleftrightarrow{一一对应} Z(a,b) \xleftrightarrow{一一对应}$ 平面向量 $\overrightarrow{OZ}$

点 $Z(a,b)$ 到原点的距离|ZO|叫做复数 $z=a+bi$ 的模，记作 $|z|=|ZO|=\sqrt{a^2+b^2}$

(6)共轭复数：当 $a,b\in R$ 时，复数 $a-bi$ 叫做 $z=a+bi$ 的共轭复数，复数 $z=a+bi$ 的共轭复数记作 $\overline{z}=a-bi$

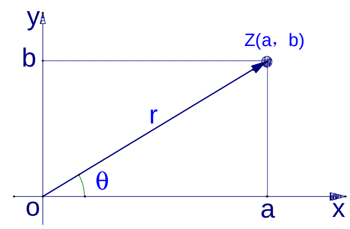
10、共轭复数的性质

1° 若复数 $z=a+bi$,则 $z\overline{z}=a^2+b^2=|z|^2$

2° 若 $z\in R$，则 $\overline{z}=z$

三、复数的三角形式

1、定义



如图 $z=a+bi$ 对应的点 $Z(a,b)$，

设 $\angle xOZ=q$，$|OZ|=r$

则 $a=r\cos q$，$b=r\sin q$，$z=r(\cos q+i\sin q)$

复数 $z=r(\cos q+i\sin q)$ 叫做复数的三角形式

(1)这里 r 是复数 z 的模即 $|z|=r$，q 叫做复数 z 的辐角

(2)若 q 是复数 z 的辐角，则 $q+2kp\,(k\in Z)$ 也是复数 z 的辐角

(3)当 $0\le q<2p$ 时，q 叫做复数 z 的辐角主值，记作 $\arg z=q$

例 1、 化下列复数为三角形式：①z=$\sqrt{3}$+i ;②z=1-i ③z= -1.

解：①z=$\sqrt{3}$+i $=2(\cos\frac{p}{6}+i\sin\frac{p}{6})$;

②z=1-i $=\sqrt{2}(\cos\frac{7p}{4}+i\sin\frac{7p}{4})$

③z=$-1=\cos p+i\sin p$.

例 2、设复数 $b-ai(a,b\in R)$ 的三角形式是 $r(\cos q+i\sin q)$，则 $a+bi$ 的三角形式是

____

解：$b-ai$＝$r(\cos q+i\sin q)$

$i(b-ai)$＝$r(i\cos q-\sin q)$

$a+bi$＝$r(-\sin q+i\cos q)=r[\cos(q+\frac{p}{2})+i\sin(q+\frac{p}{2})]$

例 3、复数 $1+\cos q-i\sin q\,(0<q<p)$ 化为三角形式是____________

解：$1+\cos q-i\sin q=2\cos^2\frac{q}{2}-2i\sin\frac{q}{2}\cos\frac{q}{2}$

$=2\cos\frac{q}{2}(\cos\frac{q}{2}-i\sin\frac{q}{2})=2\cos\frac{q}{2}[\cos(-\frac{q}{2})+i\sin(-\frac{q}{2})]$

2、三角形式**的运算法则**

设 $z_1=r_1(\cos a+i\sin a)$， $z_2=r_2(\cos b+i\sin b)$

(1) $z_1z_2=r_1(\cos a+i\sin a)\bullet r_2(\cos b+i\sin b)$

$=r_1r_2[(\cos a\cos b-\sin a\sin b)+(\cos a\sin b+\sin a\cos b)i]$

$=r_1r_2[\cos(a+b)+i\sin(a+b)]$

(2) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos a+i\sin a)}{r_2(\cos b+i\sin b)}=\frac{r_1}{r_2}\bullet\frac{(\cos a+i\sin a)(\cos b-i\sin b)}{\cos^2 b+\sin^2 b}$

$=\frac{r_1}{r_2}\bullet[(\cos a\cos b+\sin a\sin b)+(\cos a\sin b-\sin a\cos b)i]$

$=\frac{r_1}{r_2}[\cos(a-b)+i\sin(a-b)]$

(3) $z_1{}^n=r_1{}^n(\cos na+i\sin na)$

(4)设 $z_1=r_1(\cos a+i\sin a)$，则 $\overline{z_1}=r_1[\cos(-a)+i\sin(-a)]$

例 1、计算

1、$\frac{1}{\cos a+i\sin a}((0<q<p)$ 2、$\frac{1+\cos q-i\sin q}{1+\cos a+i\sin a}((0<q<p)$

解：1、$\frac{1}{\cos a+i\sin a}=\frac{\cos 0+i\sin 0}{\cos a+i\sin a}=\cos(-a)+i\sin(-a)=\cos a-i\sin a$

2、$\dfrac{1+\cos q-i\sin q}{1+\cos a+i\sin a}=\dfrac{2\cos^2\dfrac{q}{2}-2i\sin\dfrac{q}{2}\cos\dfrac{q}{2}}{2\cos^2\dfrac{q}{2}+2i\sin\dfrac{q}{2}\cos\dfrac{q}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{q}{2}-i\sin\dfrac{q}{2}}{\cos\dfrac{q}{2}+i\sin\dfrac{q}{2}}$

$=\dfrac{\cos(-\dfrac{q}{2})+i\sin(-\dfrac{q}{2})}{\cos\dfrac{q}{2}+i\sin\dfrac{q}{2}}=\cos(-q)+i\sin(-q)=\cos q-i\sin q$

例 2、设 $z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$，$w=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$，求 $\dfrac{z^2w^3}{\overline{zw}}$

解：$z=\cos(-30°)+i\sin(-30°)$，$w=\cos 45°+i\sin 45°$

$\dfrac{z^2w^3}{\overline{zw}}=\dfrac{[\cos(-60°)+i\sin(-60)][\cos 135°+i\sin 135°]}{(\cos 30°+i\sin 30°)[\cos(-45°)+i\sin(-45°)]}=\cos 90°+i\sin 90°=i$

例 3、计算下列各题

(1) $[\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{1-\sqrt{3}i}]^2$　(2) $(-1+\sqrt{3}i)^6+(1+\sqrt{3}i)^6$　(3) $(\dfrac{1+i}{1-i})^{2000}+(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2})^{1995}$

解：(1) $[\dfrac{\sqrt{2}(1-i)}{1-\sqrt{3}i}]^2=\dfrac{2(-2i)}{2-2\sqrt{3}i}=\dfrac{-2i}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{-2i(1+\sqrt{3}i)}{4}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$

(2) $(-1+\sqrt{3}i)^6+(1+\sqrt{3}i)^6=[2(\cos\dfrac{2p}{3}+i\sin\dfrac{2p}{3})]^6+[2(\cos\dfrac{p}{3}+i\sin\dfrac{p}{3})]^6$

$=64(\cos 4p+i\sin 4p)+64(\cos 2p+i\sin 2p)=128$

(3) $(\dfrac{1+i}{1-i})^{2000}+(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2})^{1995}=i^{2000}+(\cos\dfrac{p}{6}+i\sin\dfrac{p}{6})^{1995}$

$i^{2000}=1$，$(\cos\dfrac{p}{6}+i\sin\dfrac{p}{6})^6=\cos p+i\sin p=-1$，1995＝6×335

$(\cos\dfrac{p}{6}+i\sin\dfrac{p}{6})^{1995}=(-1)^{335}=-1$,原式＝0

四、复数的开方

1、负数的平方根

(1) 由于（±i）^{2}＝-1，**于是－1 平平方根是**±i

(2)设 $a<0$，则 a 的平方根是±$\sqrt{-a}i$

例 1、解方程(1) $x^2=-4$，(2) $x^2=-3$

解：(1) $x=\pm\sqrt{4}i=\pm 2i$，(2) $x=\pm\sqrt{3}i$

例 2、i 的平方根是____________

解：因为 $(1+i)^2 = 2i, (\frac{1+i}{\sqrt{2}})^2 = i,$

于是 i 的平方根是 $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$

2、实系数一元二次方程的根

实系数一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a \neq 0)$

（1）求根公式

当 $\Delta > 0$ 时，方程有两个不等的实根 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

当 $\Delta = 0$ 时，方程有两个相等的实根 $x=\frac{-b}{2a}$

当 $\Delta < 0$ 时，方程有两个不等的虚根 $x=\frac{-b\pm\sqrt{4ac-b^2}\,i}{2a}$

（2）韦达定理

$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$，$x_1x_2=\frac{c}{a}$

例 1、解方程：$x^2+x-1=0$，$x^2+x+1=0$，

例 2、实系数一元二次方程 $x^2+x+m=0$ 的根是 $1+i$，求另一个根及实数 m 的值。

(3)1 的三次虚根

例 1、求 1 在复数范围内的立方根

解：$x^3=1$ 化为 $(x-1)(x^2+x+1)=0$

$x_1=1$，$x_2=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$x_2=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

（2）记 $w=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$v=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

则 $w^2=v$，$v^2=w$，$w^3=v^3=1$

w^n 与 v^n 都以 3 为周期，即 $w^{n+3}=v^n$

例、计算 $(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2})^{101}$

4、复数的 n 次方根

例 1、求1的 3 次方根

解：设 1 的 3 次方根为$r(\cos q+i\sin q)(r>0,0\le q<2p)$

则$[r(\cos q+i\sin q)]^3=1$

由于$[r(\cos q+i\sin q)]^3=r^3(\cos 3q+i\sin 3q)$，$1=\cos 0+i\sin 0$

于是$r^3=1\Rightarrow r=1$，$3q=0+2kp\,(k\in Z)\Rightarrow q=\dfrac{2kp}{3}(k\in Z)$

因为$0\le q<2p$，所以$q=0$或$q=\dfrac{2p}{3}$或$q=\dfrac{4p}{3}$

故 1 的 3 次方根有 3 个$\cos 0+i\sin 0=1$，$\cos\dfrac{2p}{3}+i\sin\dfrac{2p}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，

$$\cos\frac{4p}{3}+i\sin\frac{4p}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

例 2、求复数$r(\cos q+i\sin q)(r>0,0\le q<2p)$的 n 次方根

解：设复数复数$r(\cos q+i\sin q)(r>0,0\le q<2p)$的 n 次方根为

$$z=r(\cos a+i\sin a)(r>0,0\le a<2p)$$

则$z^n=r^n(\cos na+i\sin na)=r(\cos q+i\sin q)$

$$r^n=r,na=q+2kp\,(k\in Z)$$

于是 $r=\sqrt[n]{r},a=\dfrac{q+2kp}{n}(k=0,1,2,\mathbf{L}\,n-1)$