第四节　参数方程

一、　参数方程的认识

例 1、质点 M(x,y)从 A(1，8)点出发，在 x 轴的方向的速度是 4 米/秒，在 y 轴的方向的速度是-2 米/秒，求质点 M 的轨迹方程

解：设时间为 t 秒 $\begin{cases} x=1+4t \\ y=8-2t \end{cases}$ 消去 t 得，$x+2y=17(x\ge 1)$

例 2、有一物体从高为 80 米的高楼的上，以 10 米/秒的水平速度抛出，求此物体在落地时的时间与水平位移

解：设抛出时间为 t 秒，$\begin{cases} x=10t \\ y=80-5t^2 \end{cases}$　令 $y=0$ 得 $t=4$，$x=40$

*曲线的参数方程：若曲线 C 上任意一点的坐标 x,y 都是变量 t 的函数 $\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases}(t\in M)$，反之对于 $t\in M$ 由方程组确定的点都在曲线 C 上，则这个方程组叫做曲线 C 的参数方程

例 3、把下列曲线的参数方程化为普通方程

(1) $\begin{cases} x=1+4t \\ y=8-2t \end{cases}$　(2) $\begin{cases} x=1+4t \\ y=8-2t \end{cases}$ $(t\ge 1)$ (3) $\begin{cases} x=3\cos\theta \\ y=3\sin\theta \end{cases}$　(4) $\begin{cases} x=5\cos\theta \\ y=4\sin\theta \end{cases}$　(5) $\begin{cases} x=t+\dfrac{1}{t} \\ y=t-\dfrac{1}{t} \end{cases}$

解：(1) $x+2y-17=0$ (2) $x+2y-17=0(x\ge 5)$ (3) $x^2+y^2=9$

(4) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$ (5) $x^2-y^2=4$

二、圆与椭圆的参数方程

1、圆的参数方程

(1)圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 的参数方程 $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ (θ 是参数)，角 θ 叫旋转角，如图

(2)圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$ 的参数方程 $\begin{cases} x=a+r\cos\theta \\ y=b+r\sin\theta \end{cases}$ (θ 是参数)，

可看成圆 $x^2+y^2=r^2(r>0)$ 平移而得

例 1、已知 P(x,y)是圆上的点 $(x-2)^2+(y+1)^2=9$，(1)求 x+y 的范围 (2)求 3x+4y 的范围

解：设 $x=2+3\cos\theta, y=-1+3\sin\theta$

(1) $x+y=1+3(\sin\theta+\cos\theta)=1+3\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})$

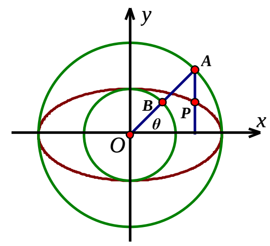
因 $-1\le\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})\le 1$，故 $1-3\sqrt{2}\le x+y\le 1+3\sqrt{2}$

(2)

$3x+4y=3(2+3\cos\theta)+4(-1+3\sin\theta)=-1+3(4\sin\theta+3\cos\theta)=-1+15\sin(\theta+\varphi)$

这里 $\dfrac{4}{5}=\sin\varphi$，$-1\le\sin(\theta+\varphi)\le 1$，于是 $-16\le 3x+4y\le 14$

2、椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a>b>0）的参数方程是$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$（$\theta$ 是参数)



设 M 点在圆$x^2+y^2=a^2$上运动、连 OM 与

圆$x^2+y^2=b^2$交于点 N，过 M 作$l_1\perp$x 轴，过 N

作$l_2\perp$y 轴，则l_1与l_2的交点 P 的轨迹方程是$\begin{cases}x=a\cos\theta\\y=b\sin\theta\end{cases}$

它是椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（a>b>0）的参数方程（参数角$\theta$叫做离心角几何意义如图）

例 2、求椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$的内接矩形的面积的最大值

解：设内接矩形面积为 S,在第一象限的顶点是$(a\cos\theta,b\sin\theta)(0<\theta<\frac{\pi}{2})$

例 3、如图第一象限的点 P 在椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$上,求四边形 OAPB 的面积的最大值

解：设 P$(a\cos\theta,b\sin\theta)(0<\theta<\frac{\pi}{2})$

于是

$$S_{OAPB}=S_{\Delta OAP}+S_{\Delta OBP}=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{2}ab\cos\theta=\frac{1}{2}ab(\sin\theta+\cos\theta)=\frac{\sqrt{2}}{2}ab\sin(\theta+\frac{\pi}{4})$$

当$\theta=\frac{\pi}{4}$时S_{OAPB}最大$=\frac{\sqrt{2}}{2}ab$

于是$S=4ab\sin\theta\cos\theta=2ab\sin 2\theta$，当$\theta=\frac{\pi}{4}$时$S_{\max}=2ab$

例 4、求圆$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=1+2\sin\theta\end{cases}$上的点 P 到定点$A(4,0)$的最大的距离

解：圆心 C(0,1),半径$r=2$，于是 P 到定点$|PA|_{\max}=|CA|+r=\sqrt{17}+2$

例 5、椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$上一点的动点$P$

(1) 求动点 P 到点(0，1)的最大距离，并求出此时 P 点的坐标

(2)求动点 P 到直线$x+2y-10=0$的距离最小，并求出此时 P 点的坐标

解 (1)设$P(3\cos\theta,2\sin\theta)$，则$P$到定点（1,0）的距离为

$$d(\theta)=\sqrt{(3\cos\theta)^2+(2\sin\theta-1)^2}=\sqrt{-5\sin^2\theta-4\sin\theta+10}=\sqrt{-5\left(\sin\theta+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{54}{5}}$$

当$\sin\theta=-\frac{2}{5}$时，$d(\theta)$取最大值$\frac{3\sqrt{30}}{5}$,此时 P$(\pm\frac{3\sqrt{21}}{5},-\frac{4}{5})$

(2) $d=\dfrac{|3\cos\theta+4\sin\theta-10|}{\sqrt{5}}=\dfrac{|5\sin(\theta+\varphi_0)-10|}{\sqrt{5}},\sin\varphi_0=\dfrac{3}{5},0<\varphi_0<\dfrac{\pi}{2}$

当$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\varphi_0$时$d_{\min}=\sqrt{5}$，此时$\cos\theta=\sin\varphi_0=\dfrac{3}{5}$，$\sin\theta=\cos\varphi_0=\dfrac{4}{5}$，P$(\dfrac{9}{5},\dfrac{8}{5})$

解 2、设直线$x+2y-10=0$的平行线$x+2y-t=0$(t>0)，联立$\begin{cases}x+2y-t=0\\4x^2+9y^2=36\end{cases}$消 x 得

$25y^2-16ty+4t^2-36=0,\Delta=16^2t^2-4\times25(4t^2-36)=0$
$16t^2-25(t^2-9)=0,t^2=25$，$t=5,$切线$x+2y-t=0$
于是最小距离=$\dfrac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5},$此时$P(\dfrac{9}{5},\dfrac{8}{5})$

例 6、椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的弦 AB，若$\angle AOB=90^\circ$,求$Rt\Delta OAB$斜边上的高 h

解：如图设$|OA|=r_1,|OB|=r_2,$以OA为终边的角为θ，以OB为终边的角为$\dfrac{\pi}{2}+\theta$则

$A(r_1\cos\theta,r_1\sin\theta),B(r_2\sin\theta,r_2\cos\theta)$，于是

$$\frac{r_1^2\cos^2\theta}{a^2}+\frac{r_1^2\sin^2\theta}{b^2}=1,\frac{r_2^2\sin^2\theta}{a^2}+\frac{r_2^2\cos^2\theta}{b^2}=1$$
$$\frac{\cos^2\theta}{a^2}+\frac{\sin^2\theta}{b^2}=\frac{1}{r_1^2},\frac{\sin^2\theta}{a^2}+\frac{\cos^2\theta}{b^2}=\frac{1}{r_2^2}$$

相加得$\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{1}{r_1^2}+\dfrac{1}{r_2^2}$，于是$\dfrac{1}{h^2}=\dfrac{1}{r_1^2}+\dfrac{1}{r_2^2}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=\dfrac{a^2+b^2}{a^2b^2},h=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

三、直线的参数方程

1、直线的方向向量：若非零向量$\vec{a}//$直线l或在直线l上，则$\vec{a}$叫直线l的方向向量

*设直线l的斜率是 k，倾斜角为θ，点 A(x_1，y_1)、B(x_2，y_2) 在直线l上，则
$\vec{m}_1=\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，$\vec{m}_2=(1,k)$，$\vec{m}_3=(\cos\theta,\sin\theta)$都是直线$l$方向向量

2、一般式

若直线l过点 A(x_0,y_0)，一个方向量$\vec{m}=(a,b)$，$P(x,y)$是直线上任意一点

则$\overrightarrow{AP}//\vec{m}\Rightarrow\overrightarrow{AP}=t\vec{m}$，$(x-x_0,y-y_0)=t(a,b)$，$\begin{cases}x-x_0=at\\y-y_0=bt\end{cases}$

于是直线l的参数方程是$\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$($t$是参数)

* $t=t_1,t_2$对应的点分别为$P_1(x_0+at_1,y_0+bt_1)$,$P_2(x_0+at_2,y_0+bt_2)$，则

$|P_1P_2|=\sqrt{a^2+b^2}\,|t_1-t_2|$,直线$l$的斜率$k=\dfrac{b}{a}$

例 1、直线 l 过点 A(3,-4), $\vec{m}=(2,4)$ 是一个方向向量，则

(1)直线 l 的参数方程是________ (2)直线 l 的斜率=______

(3) 设 t=2,-3 对应的点分别为 B,C 则|BC|=_____

解：(1)直线 l 的参数方程是 $\begin{cases} x=3+2t \\ y=-4+4t \end{cases}$ (t是参数）

(2)直线 l 的斜率=$\dfrac{4}{2}=2$

(3)$|BC|=\sqrt{a^2+b^2}\,|t_1-t_2|=\sqrt{2^2+4^2}\,|2-(-3)|=10\sqrt{5}$

3、标准式：设直线 l 过点 A(x_0, y_0)，倾斜角为 a ，则 $\vec{m}=(\cos a,\sin a)$ 是直线 l 一个方向向量，参数方程是 $\begin{cases} x=x_0+t\cos a \\ y=y_0+t\sin a \end{cases}$ (t是参数）是直线 l 的参数方程的

* 设 $t=t_1, t_2$ 对应的点是 P_1, P_2，则 $|P_1P_2|=|t_1-t_2|$，

例 3、已知直线 l 经过点 A(1,1),倾斜角 $a=\dfrac{p}{6}$

（1）写出直线 l 的参数方程。（2）设 l 与椭圆 $x^2+y^2=4$ 相交与 P_1, P_2 两点，求 $|P_1A||P_2A|, |P_1A|+|P_2A|$

解：（1）直线的参数方程是 $\begin{cases} x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=1+\dfrac{1}{2}t; \end{cases}$

（2）设点 P_1, P_2 对应的参数为 t_1 和 t_2，

把 $\begin{cases} x=1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \\ y=1+\dfrac{1}{2}t; \end{cases}$ 代入圆的方程 $x^2+y^2=4$ 整理得 $t^2+(\sqrt{3}+1)t-2=0$ ①

$t_1+t_2=-(\sqrt{3}+1)$，$t_1t_2=-2$，所以 $|P_1A||P_2A|=|t_1||t_2|=|t_1t_2|=2$。

$|P_1A|+|P_2A|=|t_1|+|t_2|=|t_1-t_2|=\sqrt{(t_1-t_2)^2}=\sqrt{(t_1+t_2)^2-4t_1t_2}$
$=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+8}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2+8}=\sqrt{12+2\sqrt{3}}$

例 4、直线 $\begin{cases} x=-2+4t, \\ y=-1-3t \end{cases}$ (t为参数) 被圆 $\begin{cases} x=2+5\cos q, \\ y=1+5\sin q \end{cases}$ （q **为参数**）所截得的弦长为_ 6

四、其他的参数方程

1、双曲线

*双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，考虑到 $\dfrac{1}{\cos^2 q}-\tan^2 q=1$ 于是可设 $\begin{cases} x=a\sec q \\ y=b\tan q \end{cases}$

双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的参数方程是 $\begin{cases} x=a\sec q \\ y=b\tan q \end{cases}$

2、 抛物线的参数方程

$y^2=2px$，$\dfrac{y}{2p}=\dfrac{x}{y}=t$，于是 $\begin{cases} x=2pt^2 \\ y=2pt \end{cases}$ 抛物线 $y^2=2px$ 的参数方程是 $\begin{cases} x=2pt^2 \\ y=2pt \end{cases}$

3、渐开线

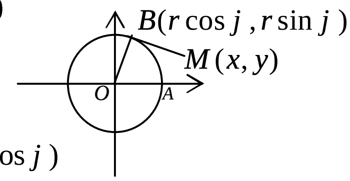
(1)定义：定圆上的动点 B 从 A 开始运动,BM 是圆的切线段，且$|MB|=$弧AB的长，则动点 M 的轨迹叫渐开线，这个定圆叫做渐开线的基圆

$M(a\cos\theta,\sin\theta)$　　$N(b\cos\theta,b\sin\theta)$

(2)求渐开线的方程

解：以定圆的圆心 O 为原点，以 OA 为 x 轴，建系

设$M(x,y)$，以 OA 为始边 OB 为终边的角为φ，则$B(r\cos\varphi,r\sin\varphi)$



故$\overrightarrow{BM}=(x-r\cos\varphi,y-r\sin\varphi)$，(1)

由于$|MB|=$弧AB的长，故$|\overrightarrow{BM}|=r\varphi$，

因为$\overrightarrow{OB}=(\cos\varphi,\sin\varphi)$，故与$\overrightarrow{BM}$同向的单位向量是$\overrightarrow{e_2}=(\sin\varphi,-\cos\varphi)$

于是$\overrightarrow{BM}=r\varphi\overrightarrow{e_2}=(r\varphi\sin\varphi,-r\varphi\cos\varphi)$ (2)

由(1)(2)得$\begin{cases}x-r\cos\varphi=r\varphi\sin\varphi\\ y-r\sin\varphi=-r\varphi\cos\varphi\end{cases}$ 即$\begin{cases}x=r(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi)\\ y=r(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)\end{cases}$为所求

4、摆线

(1)设动圆 B 上的定点 M 开始时的位置在直线l上的 O 点处，当圆 B 在直线l上滚动时，点 M 的轨迹叫做摆线，又叫做平轮线

(2)求摆线的方程

解：以定圆的圆心 O 为原点，以直线 l 为 x 轴，建系

设动圆 B 与直线l切于 A, 以 BM 为始边， BA 为终边的角为φ，设$M(x,y)$

则$x=OA-MC=$弧MA的长$-MC=r\varphi-r\sin\varphi$，

$y=AC=AB-CB=r-r\cos\varphi$