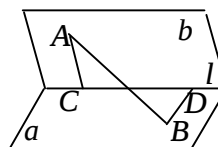


空间向量练习(廖老师出题)

- 1、已知向量 $\mathbf{a} = (0, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, -2)$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 ()
 (A) 0° (B) 45° (C) 90° (D) 180°
- 2、已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 $A(3, 3, 2)$, $B(4, -3, 7)$, $C(0, 5, 1)$, 则 BC 边上的中线长为 ()
 (A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5
- 3、若 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 均为非零向量, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线的 ()
 (A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
 (C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件
- 4、已知 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $|\mathbf{c}| = 4$, 则向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 之间的夹角 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 为 ()
 (A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 以上都不对
- 5、已知 $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, 4, -2)$, $\mathbf{c} = (7, 5, \lambda)$, 若 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 三向量共面, 则实数 λ 等于 ()
 (A) $\frac{62}{7}$ (B) $\frac{63}{7}$ (C) $\frac{64}{7}$ (D) $\frac{65}{7}$
- 6、已知 A、B、C 三点不共线, 对平面 ABC 外的任一点 O, 下列条件中能确定点 M 与点 A、B、C 一定共面的是 ()
 A. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ B. $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$
 C. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$ D. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$
- 7、在下列命题中: ①若 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 共线, 则 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 所在的直线平行; ②若 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 所在的直线是异面直线, 则 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 一定不共面; ③若 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 三向量两两共面, 则 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$ 三向量一定也共面; ④已知三向量 $\mathbf{a}$ 、 $\mathbf{b}$ 、 $\mathbf{c}$, 则空间任意一个向量 $\mathbf{p}$ 总可以唯一表示为 $\mathbf{p} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$. 其中正确命题的个数为 ()
 (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3
- 8、在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 和 N 分别为 A_1B_1 和 BB_1 的中点, 那么直线 AM 与 CN 所成角的余弦值是 ()
 A. $-\frac{2}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$
- 9、已知 $\overrightarrow{OA} = (1, 2, 3)$, $\overrightarrow{OB} = (2, 1, 2)$, $\overrightarrow{OP} = (1, 1, 2)$, 点 Q 在直线 OP 上运动, 则当 $\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{QB}$ 取得最小值时, 点 Q 的坐标为 ()
 (A) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3})$ (B) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4})$ (C) $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ (D) $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$
- 10、在基底 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$ 下向量 $\vec{m}$ 的坐标是 $(2, 3, -1)$, 求 $\vec{m}$ 在基底 $\{\mathbf{a}, \mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}\}$ 下的坐标是 _____

11. 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2, AD = 2, AA_1 = 1, \angle BAD = 90^\circ$,
 $\angle A_1AB = \angle A_1AD = 60^\circ$, 则 $AC_1 =$ _____

12. 二面角 $\alpha - l - \beta$ 的大小为 120° , $AC = DC = BD = 1$, $A \in \alpha, B \in \beta$,
 $AC \perp l$ 于 $C, BD \perp l$ 于 D , 异面直线 CD 与 AB 所成的角 = _____

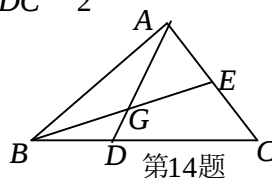


第12题

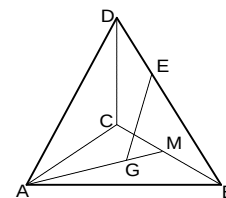
13. 在空间四边形 $ABCD$ 中, AC 和 BD 为对角线, G 为 $\triangle ABC$ 的重心,
 E 是 BD 上一点, $BE = 3ED$, 以 $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\}$ 为基底,
 则 $\vec{GE} =$ _____.

14. 如图, $\triangle ABC$ 中, E 是 AC 的中点, $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$, AD 交 BE 于点 G ,

若 $\vec{BG} = l \vec{BE}$, 则 $l =$ _____

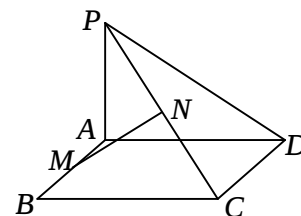


第14题



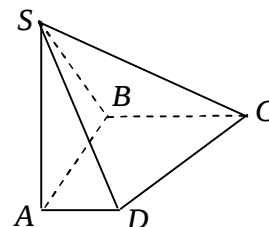
第13题

15. 如图: $ABCD$ 为矩形, $PA \perp$ 平面 $ABCD$, $PA = AD$, M 、 N 分别是 AB 、 PC 中点,
 (1) 求证: $MN \perp$ 平面 PCD (2) 当 $AB = AD$ 时, 求 MC 与 PD 所成角的余弦



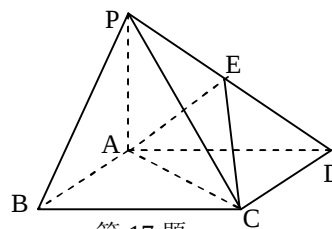
16、ABCD 是直角梯形， $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ ，
 $SA \perp$ 平面 ABCD， $SA = AB = BC = 1$ ， $AD = \frac{1}{2}$ 。

- (1) 求 SC 与平面 ASD 所成的角余弦；
 (2) 求平面 SAB 和平面 SCD 所成角的余弦。



17、如图，底面为平行四边形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，
 $AB \perp AC$, $PA \perp$ 平面 ABCD，且 $PA = AB$ ，点 E 是 PD 的中点

- (1) 求证： $AC \perp PB$ (2) 求证： $PB \parallel$ 平面 AEC (3) 求二面角 $E-AC-B$ 的大小



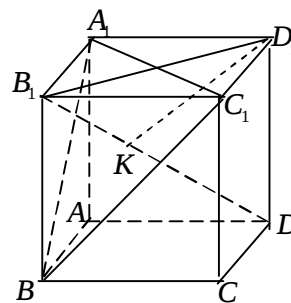
第 17 题

18、如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中

(I) 证明: $B_1D \perp$ 平面 A_1BC_1 ;

(II) 已知动点 K 满足 $\overrightarrow{B_1K} = l \overrightarrow{B_1D} (0 < l < 1)$

若点 $K \in$ 平面 A_1BC_1 , 求 D_1K 与 A_1BC_1 所成角 α 的正弦值



空间向量练习(廖老师出题)

1、已知向量 $\mathbf{a} = (0, 2, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, -2)$, 则 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的夹角为 (C)

(A) 0° (B) 45° (C) 90° (D) 180°

解: $\cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = 0, \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 90^\circ$, 选 C

2、已知 $\triangle ABC$ 的三个顶点为 A (3, 3, 2), B (4, -3, 7), C (0, 5, 1), 则 BC 边上的中线长为 (B)

(A) 2 (B) 3 (C) 4 (D) 5

解: BC 中点 D(2.5, 1, 4), $|\overrightarrow{AD}| = \sqrt{1+4+4} = 3$

3、若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 均为非零向量, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$ 是 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 共线的 (C)

(A) 充分不必要条件 (B) 必要不充分条件
(C) 充分必要条件 (D) 既不充分又不必要条件

4、已知 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, $|\mathbf{a}| = 2$, $|\mathbf{b}| = 3$, $|\mathbf{c}| = 4$, 则向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 之间的夹角 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 为 (D)

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 以上都不对

解: $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}, \mathbf{a} + \mathbf{b} = -\mathbf{c}$,

$$|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{c}|^2, 4 + 9 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 16, \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{3}{2}, \cos \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{\frac{3}{2}}{2 \cdot 3} = \frac{1}{4}$$

5、已知 $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$, $\mathbf{b} = (-1, 4, -2)$, $\mathbf{c} = (7, 5, \lambda)$, 若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三向量共面, 则实数 λ 等于 (D)

(A) $\frac{62}{7}$ (B) $\frac{63}{7}$ (C) $\frac{64}{7}$ (D) $\frac{65}{7}$

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= m\mathbf{a} + n\mathbf{b}, (7, 5, \lambda) = m(2, -1, 3) + n(-1, 4, -2) \\ \begin{cases} 2m - n = 7 \\ -m + 4n = 5 \\ l = 3m - 2n \end{cases} &\Rightarrow m = \frac{33}{7}, n = \frac{17}{7}, l = 3m - 2n = \frac{99 - 34}{7} = \frac{65}{7} \end{aligned}$$

6、已知 A、B、C 三点不共线, 对平面 ABC 外的任一点 O, 下列条件中能确定点 M 与点 A、B、C 一定共面的是 (D)

A. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

B. $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$

C. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

D. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OC}$

7、在下列命题中: ①若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 共线, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所在的直线平行; ②若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 所在的直线是异面直线, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 一定不共面; ③若 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三向量两两共面, 则 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 三向量一定也共面;

④已知三向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$, 则空间任意一个向量 $\mathbf{p}$ 总可以唯一表示为 $\mathbf{p} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c}$.

其中正确命题的个数为

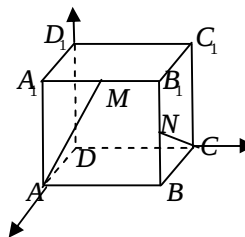
(A)

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

8. 在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, M 和 N 分别为 A_1B_1 和 BB_1 的中点, 那么直线 AM 与 CN 所成角的余弦值是 (B)

A. $-\frac{2}{5}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$

解: $\vec{AM} = (0, 1, 2), \vec{CN} = (2, 0, 1), \cos q = \frac{|\vec{AM} \cdot \vec{CN}|}{|\vec{AM}| |\vec{CN}|} = \frac{2}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{2}{5},$



9. 已知 $\vec{OA} = (1, 2, 3), \vec{OB} = (2, 1, 2), \vec{OP} = (1, 1, 2)$, 点 Q 在直线 OP 上运动, 则当 $\vec{QA} \cdot \vec{QB}$ 取得最小值时, 点 Q 的坐标为 (C)

(A) $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3})$ (B) $(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4})$ (C) $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3})$ (D) $(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3})$

解: 设 $\vec{OQ} = l\vec{OP} = l(1, 1, 2) = (l, l, 2l), Q(l, l, 2l)$

$\vec{QA} \cdot \vec{QB} = (1-l, 2-l, 3-2l) \cdot (2-l, 1-l, 2-2l) = 2(1-l)(2-l) + 2(3-2l)(1-l)$

$= 2(1-l)(5-3l) = 2(l-1)(3l-5), l = \frac{1+\frac{5}{3}}{2} = \frac{4}{3}$ 时 $\vec{QA} \cdot \vec{QB}$ 最小, 此时 $Q(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3})$

注: 此题由 $Q(l, l, 2l)$ 可得 C

10. 在基底 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 下向量 $\vec{m}$ 的坐标是 $(2, 3, -1)$, 求 $\vec{m}$ 在基底 $\{\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\}$ 下的坐标是 _____

解: 因为在基底 $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ 下向量 $\vec{m}$ 的坐标是 $(2, 3, -1)$

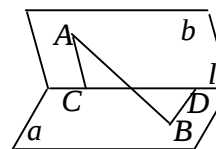
所以 $\vec{m} = 2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$, 设 $\vec{m} = x\vec{a} + y(\vec{a} + \vec{b}) + z(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$

则 $\vec{m} = (x+y+z)\vec{a} + (y+z)\vec{b} + z\vec{c}$, 对照得 $\begin{cases} x+y+z=2 \\ y+z=3 \\ z=-1 \end{cases}$, 于是 $\begin{cases} x=-1 \\ y=4 \\ z=-1 \end{cases}$

因此 $\vec{m}$ 在基底 $\{\vec{a}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\}$ 下的坐标是 $(-1, 4, -1)$

11. 平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中, $AB = 2, AD = 2, AA_1 = 1, \angle BAD = 90^\circ, \angle A_1AB = \angle A_1AD = 60^\circ$, 则 $AC_1 =$ _____

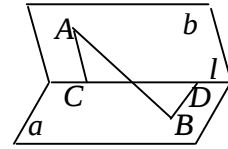
解: $\vec{AC}_1 = \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AA}_1$
 $|\vec{AC}_1|^2 = |\vec{AB}|^2 + |\vec{AD}|^2 + |\vec{AA}_1|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + 2\vec{AB} \cdot \vec{AA}_1 + 2\vec{AD} \cdot \vec{AA}_1$
 $= 4 + 4 + 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 13, |\vec{AC}_1| = \sqrt{13}$



第12题

12. 二面角 $a-l-b$ 的大小为 $120^\circ, AC=DC=BD=1, A \in a, B \in b, AC \perp l \text{ 于 } C, BD \perp l \text{ 于 } D$, 异面直线 CD 与 AB 所成的角 = _____

$$\begin{aligned}
 \text{解: } |\vec{AB}|^2 &= \vec{AB} \cdot \vec{AB} = (\vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DB})^2 \\
 &= \vec{AC} \cdot \vec{AC} + \vec{CD} \cdot \vec{CD} + \vec{DB} \cdot \vec{DB} + 2\vec{AC} \cdot \vec{CD} + 2\vec{AC} \cdot \vec{DB} + 2\vec{CD} \cdot \vec{DB} \\
 &= 3 - 2\vec{CA} \cdot \vec{DB} = 3 - 2 \times 1 \times 1 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 4, |\vec{AB}| = 2 \\
 \vec{CD} \cdot \vec{AB} &= \vec{CD} \cdot (\vec{AC} + \vec{CD} + \vec{DB}) = \vec{CD} \cdot \vec{CD} = 1 \\
 \cos q &= |\cos \langle \vec{CD}, \vec{AB} \rangle| = \frac{|\vec{CD} \cdot \vec{AB}|}{|\vec{CD}| |\vec{AB}|} = \frac{1}{1 \times 2} = \frac{1}{2} \\
 \text{于是 } q &= 60^\circ
 \end{aligned}$$

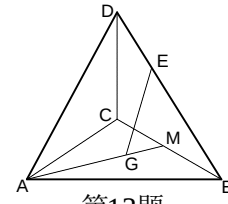


13、在空间四边形 ABCD 中，AC 和 BD 为对角线，G 为 $\triangle ABC$ 的重心，

E 是 BD 上一点，BE=3ED，以 $\{\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}\}$ 为基底，

则 $\vec{GE} =$ _____.

$$\begin{aligned}
 \text{解: } \vec{GE} &= \vec{GB} + \vec{BE} = \frac{2}{3}(\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}) + \frac{3}{4}\vec{BD} \\
 &= \frac{2}{3}(\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}) + \frac{3}{4}(\vec{AD} - \vec{AB}) = -\frac{1}{12}\vec{AB} - \frac{1}{3}\vec{AC} + \frac{3}{4}\vec{AD}
 \end{aligned}$$

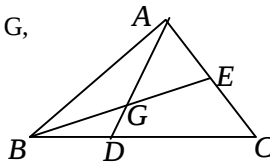


第13题

14、如图， $\triangle ABC$ 中，E 是 AC 的中点， $\frac{BD}{DC} = \frac{1}{2}$ ，AD 交 BE 于点 G，

若 $\vec{BG} = l \vec{BE}$ ，则 $l =$ _____

$$\begin{aligned}
 \text{解: } \vec{BG} &= l \vec{BE} = \frac{1}{2}l(\vec{BA} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}l(\vec{BA} + 3\vec{BD}) = \frac{1}{2}l\vec{BA} + \frac{3}{2}l\vec{BD} \\
 \frac{1}{2}l + \frac{3}{2}l &= 1, l = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$



第14题

15. 如图：ABCD 为矩形，PA $\perp$ 平面 ABCD，PA=AD，M、N 分别是 AB、PC 中点，

(1) 求证：MN $\perp$ 平面 PCD (2) 当 AB=AD 时，求 MC 与 PD 所成角的余弦

解：以 AB, AD, AP 为 x, y, z 轴建系 A-xyz

设 PA=AD=a, AB=b, 则 A(0, 0, 0), B(b, 0, 0), C(b, a, 0), D(0, a, 0), P(0, 0, a)

于是 $M(\frac{b}{2}, 0, 0)$, $N(\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$,

$\vec{MN} = (\frac{b}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a}{2})$, $\vec{DP} = (0, -a, a)$, $\vec{DC} = (b, 0, 0)$,

$\vec{MN} \cdot \vec{DP} = 0$, $\vec{MN} \cdot \vec{DC} = 0$, $\vec{MN} \perp \vec{DP}$, $\vec{MN} \perp \vec{DC}$

Q $\vec{DP} \cap \vec{DC} = P$

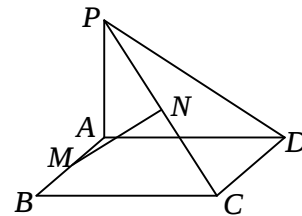
$\therefore \vec{MN} \perp$ 平面 PCD

(2) 当 AB=AD 时, a=b,

$M(\frac{a}{2}, 0, 0)$, $C(a, a, 0)$, $\vec{MC} = (\frac{a}{2}, a, 0)$, $\vec{DP} = (0, -a, a)$

设 MC 与 PD 所成角为 q, 则

$$\cos q = |\cos \langle \vec{MC}, \vec{DP} \rangle| = \frac{|\vec{MC} \cdot \vec{DP}|}{|\vec{MC}| |\vec{DP}|} = \frac{|-a^2|}{\frac{\sqrt{5}}{2}a \cdot \sqrt{2}a} = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

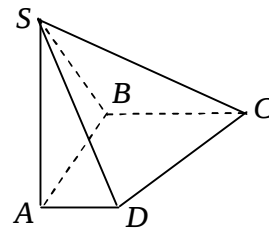


16、ABCD 是直角梯形， $\angle ABC = \angle BAD = 90^\circ$ ，

$SA \perp$ 平面 ABCD， $SA = AB = BC = 1$ ， $AD = \frac{1}{2}$ 。

(1) 求 SC 与平面 ASD 所成的角余弦；

(2) 求平面 SAB 和平面 SCD 所成角的锐二面角余弦。



解：(1) 以 AD, AB, AS 为 x, y, z 轴建系 A-xyz

$A(0,0,0), B(0,1,0), C(1,1,0), D(\frac{1}{2},0,0), S(0,0,1)$

$\vec{AB} = (0,1,0), \vec{AS} = (0,0,1), \vec{SC} = (1,1,-1)$

平面 ASD 的法向量为 $\vec{m} = (0,1,0)$

设 SC 与平面 ASD 所成的角为 q ，则 $\sin q = |\cos \langle \vec{m}, \vec{SC} \rangle| = \frac{|\vec{m} \cdot \vec{SC}|}{|\vec{m}| |\vec{SC}|} = \frac{1}{1 \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\cos q = \sqrt{1 - \sin^2 q} = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2) 平面 SAB 的法向量为 $\vec{n} = (1,0,0)$

$\vec{DC} = (\frac{1}{2},1,0), \vec{SD} = (\frac{1}{2},0,-1)$

设平面 SCD 的法向量为 $\vec{p} = (x,y,z)$ ，则

$$\begin{cases} \vec{p} \cdot \vec{DC} = 0 \\ \vec{p} \cdot \vec{SD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}x + y = 0 \\ \frac{1}{2}x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2}x \\ z = \frac{1}{2}x \end{cases}, \text{ 令 } x = 2, \vec{p} = (2, -1, 1)$$

平面 SAB 和平面 SCD 所成角的锐角为 j

$$\text{则 } \cos j = |\cos \langle \vec{n}, \vec{p} \rangle| = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{p}|}{|\vec{n}| |\vec{p}|} = \frac{2}{1 \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

17、如图，底面为平行四边形的四棱锥 $P-ABCD$ 中，
 $AB \perp AC$, $PA \perp$ 平面 $ABCD$ ，且 $PA = AB$ ，点 E 是 PD 的中点

(1) 求证: $AC \perp PB$ (2) 求证: $PB \parallel$ 平面 AEC (3) 求二面角 $E-AC-B$ 的大小
 解(1)以 AB, AC, AP 为 x, y, z 轴建系 $A-xyz$

设 $PA=AB=a, AC=b$, 则 $A(0,0,0), B(a,0,0), C(0,b,0), D(-a,b,0), P(0,0,a)$

$A(0,0,0), B(a,0,0), C(0,b,0), D(-a,b,0), P(0,0,a)$

$AC=(0,b,0), PB=(a,0,-a), AC \cdot PB=0, AC \perp PB$

(2) 取 AC 中点 $M(0, \frac{b}{2}, 0), E(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{a}{2}), \vec{ME} = (-\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2})$,

$\vec{PB}=(a,0,-a)=-2(-\frac{a}{2}, 0, \frac{a}{2}),$ 故 $\vec{PB}=-2\vec{ME}$

于是 $PB \parallel ME$, 又 $PB \notin$ 平面 $EAC, ME \subset$ 平面 EAC

故 $PB \parallel$ 平面 AEC

(3) 平面 ABC 的法向量为 $\vec{m}=(0,0,1)$

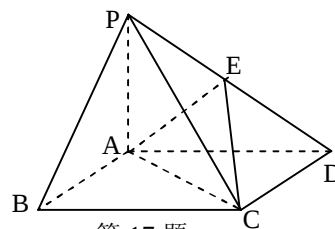
$\vec{AE}=(-\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{a}{2}), \vec{AC}=(0,b,0)$

设平面 ACE 的法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$, 则

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{AE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{AC} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{a}{2}x + \frac{b}{2}y + \frac{a}{2}z = 0 \\ by = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = x \\ y = 0 \end{cases}, \text{ 令 } x = 1, \vec{n} = (1, 0, 1)$$

设二面角 $E-AC-B$ 的大小为 θ

$$\text{则 } \cos \theta = -|\cos \langle \vec{n}, \vec{m} \rangle| = -\frac{|\vec{m} \cdot \vec{n}|}{|\vec{m}| |\vec{n}|} = -\frac{1}{1 \cdot \sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ 于是 } \theta = \frac{3\pi}{4}$$



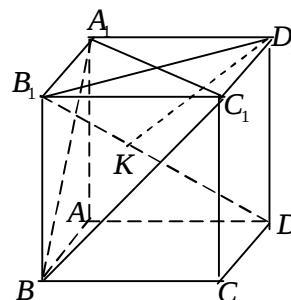
第 17 题

18、如图，在棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中

(I) 证明: $B_1D \perp$ 平面 A_1BC_1 ;

(II) 已知动点 K 满足 $\overrightarrow{B_1K} = l \overrightarrow{B_1D} (0 < l < 1)$

若点 $K \in$ 平面 A_1BC_1 , 求 D_1K 与 A_1BC_1 所成角 α 的正弦值



解: (I) 如图建立空间坐标系 A-xyz, 则

$$B(1, 0, 1), D(0, 1, 0), A_1(0, 0, 1), B_1(1, 0, 0), C_1(1, 1, 1),$$

$$\overrightarrow{DB_1} = (1, -1, 1), \overrightarrow{AB_1} = (1, 0, -1), \overrightarrow{A_1C_1} = (1, 1, 0),$$

$$\overrightarrow{DB_1} \cdot \overrightarrow{AB_1} = 0, \overrightarrow{DB_1} \cdot \overrightarrow{A_1C_1} = 0$$

$$\therefore \overrightarrow{DB_1} \perp \overrightarrow{AB_1}, \overrightarrow{DB_1} \perp \overrightarrow{A_1C_1}, \text{ 又 } \overrightarrow{AB_1} \cap \overrightarrow{A_1C_1} = A_1$$

$$\therefore \overrightarrow{DB_1} \perp \text{平面 } A_1BC_1;$$

(II) 因 $\overrightarrow{DB_1} = (-1, 1, -1)$

$$\text{故 } \overrightarrow{B_1K} = l \overrightarrow{B_1D} = (-l, l, -l), \text{ 于是 } K(1-l, l, 1-l)$$

$$\overrightarrow{A_1K} = (1-l, l, -l), \text{ 因为 } \overrightarrow{DB_1} = (-1, 1, -1) \overrightarrow{A_1K} = (1-l, l, -l)$$

当 $K \in$ 平面 A_1BC_1 时, $\overrightarrow{A_1K} \subset$ 平面 A_1BC_1

$$\overrightarrow{B_1D} \perp \text{平面 } A_1BC_1$$

$$\therefore \overrightarrow{B_1D} \perp \overrightarrow{A_1K}$$

$$\overrightarrow{B_1D} \cdot \overrightarrow{A_1K} = l(-1) + l + l = 3l - 1 = 0, l = \frac{1}{3}, K(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$$

$$D_1(0, 1, 1), \overrightarrow{D_1K} = (\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$$

$\overrightarrow{DB_1} = (-1, 1, -1)$ 是平面 A_1BC_1 的一个法向量

$$\text{于是 } \sin \alpha = |\cos \langle \overrightarrow{D_1K}, \overrightarrow{DB_1} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{D_1K} \cdot \overrightarrow{DB_1}|}{|\overrightarrow{D_1K}| |\overrightarrow{DB_1}|} = \frac{|-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}|}{\sqrt{(\frac{2}{3})^2 + (-\frac{2}{3})^2 + (-\frac{1}{3})^2} \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

