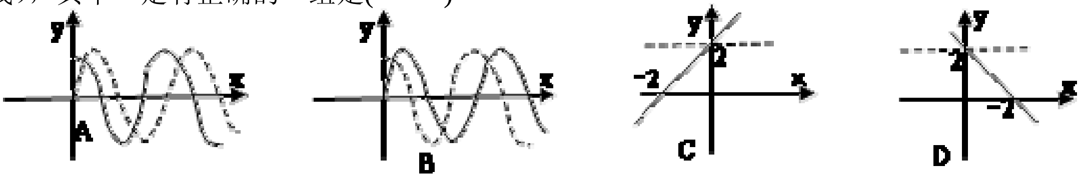
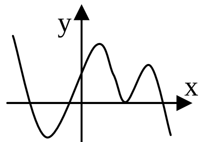
导数练习一(廖师出题)

一、选择

1、如图，在同一坐标系中函数 $y=f(x)$ 的图象（实线）和它的导函数 $y=f'(x)$ 的图象（虚线），其中一定有正确的一组是(　　)



2、若 $y=f'(x)$ 的图象如右图，则 $y=f(x)$ (　　)

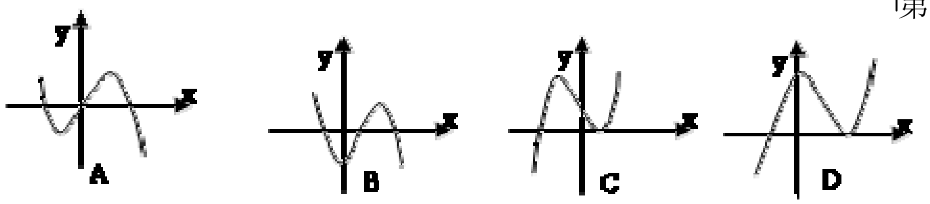


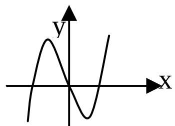
第2题

A、有3个极值点,5个单调区间　　B、有3个极值点,4个单调区间

C、有4个极值点,5个单调区间　　D、有4个极值点,4个单调区间

3、已知函数 $y=xf'(x)$ 的图象如右图，则 $y=f(x)$ 的图象是(　　)





第3题

4、y=xcosx−sinx 在下面哪个区间内是增函数（　　）

A $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ B (π,2π) C $(\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2})$ D (2π,3π)

5、若 a>0, b>0, 且函数 $f(x)=4x^3-ax^2-2bx+2$ 在 x=1 处有极值，则 ab 的最大值等于（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 6　　D. 9

6、、若则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2$，则 $f'(x_0)$ =(　　)

A. 6　　B. -6　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $-\frac{2}{3}$

7．函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+1$ 在区间（1，4）上为减函数，在 $(6,+\infty)$ 上为增函数，则实数 a 的取值范围是(　　)A．$a\le 5$　B．$5\le a\le 7$　C．$a\ge 7$　D．$a\le 5$或$a\ge 7$

8、已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数，且 $f(x)<f'(x)$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，$a<b$ 则有(　　)

A、$e^b f(a)<e^a f(b)$　B、$e^b f(a)=e^a f(b)$，

C、$e^b f(a)>e^a f(b)$，D、$e^b f(a)$与$e^a f(b)$ 大小不能确定

二、填空题

9、曲线 $y=-x^3+3x+2$ 在点 x=0 处的切线方程为________

10、函数 $f(x)=a\ln x+x$ 在 $x=1$ 处取得极值，则 a 的值为_____

11、已知函数 $f(x)=\ln x-f'(1)x^2+3x-4$，则 $f'(1)$＝________.

12、过点(0,-1)曲线 $y=-x^3+3x^2$ 的切线方程为_____

三、解答题

13、已知函数 $f(x)=x(x-a)^2, a$ 是大于零的常数

(Ⅰ)当 a＝1 时，求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间[1,2]上单调递增，求实数 a 的取值范围

14、已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx$, x=-1 是 $f(x)$ 的极值点

（I）试用含 a 的代数式表示 b；　　（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

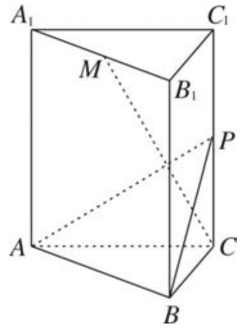
15、若存在过点(1,0)的直线与曲线 $y=x^3$ 和 $y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$ 都相切，求 a 的值

16、已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（**a>b>0**）的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆的弦 AB 的中点坐标为(2,1)，

（1）求弦 AB 所在的直线（2）若 ΔOAB 的面积为 $2\sqrt{3}$ 椭圆方程

17、如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 4 正三角形，$AA_1\perp$ 平面 ABC，$AA_1=2\sqrt{6}$，

M 为 A_1B_1 的中点．



（I）求证：$MC\perp AB$；

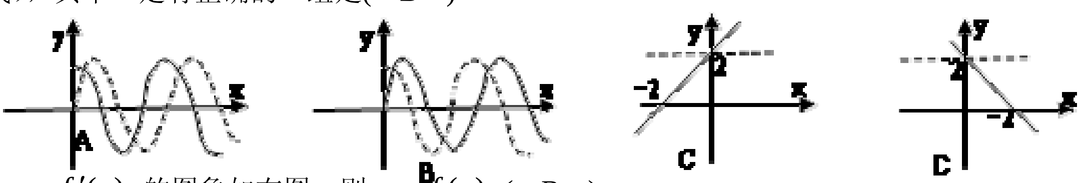
（II）在棱 CC_1 上是否存在点 P，使得 $MC\perp$ 平面 ABP？若存在，确定点 P 的位置；若不存在，说明理由．

（III）若点 P 为 CC_1 的中点，求二面角 $B-AP-C$ 的余弦值．

导数练习一(廖师出题)

一、选择

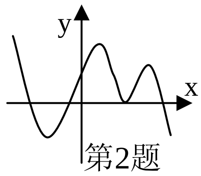
1、如图，在同一坐标系中函数 $y=f(x)$ 的图象（实线）和它的导函数 $y=f'(x)$ 的图象（虚线），其中一定有正确的一组是(　B　)



2、若 $y=f'(x)$ 的图象如右图，则 $y=f(x)$ (　B　)

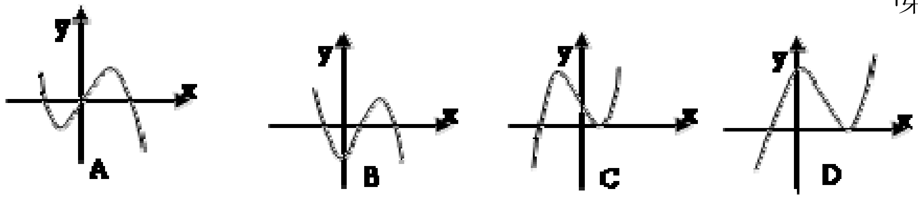
A、有3个极值点,5个单调区间　　B、有3个极值点,4个单调区间

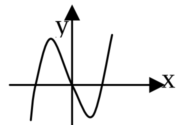
C、有4个极值点,5个单调区间　　D、有4个极值点,4个单调区间



第2题

3、已知函数 $y=xf'(x)$ 的图象如右图，则 $y=f(x)$ 的图象是（ D ）





第3题

4、y=xcosx−sinx 在下面哪个区间内是增函数（B）

A ($\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$)B (π,2π) C ($\frac{3\pi}{2},\frac{5\pi}{2}$)D (2π,3π)

5、若 a>0, b>0, 且函数 $f(x)=4x^3-ax^2-2bx+2$ 在 x=1 处有极值，则 ab 的最大值等于 D

A. 2　　　　B. 3　　C. 6　　　　D. 9

6、、若则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0-3\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=2$，则 $f'(x_0)$=(D　)

A. 6　　B. -6　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $-\frac{2}{3}$

7．函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2+(a-1)x+1$ 在区间（1，4）上为减函数，在 $(6,+\infty)$ 上为增函数，则实数 a 的取值范围是（B　）A．$a\le 5$　B．$5\le a\le 7$　C．$a\ge 7$　D．$a\le 5$ 或 $a\ge 7$

8、已知 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的可导函数，且 $f(x)<f'(x)$ 对任意的 $x\in R$ 恒成立，$a<b$ 则有(　A）

A、$e^b f(a)<e^a f(b)$　B、$e^b f(a)=e^a f(b)$，

C 、$e^b f(a)>e^a f(b)$，D 、$e^b f(a)$ 与 $e^a f(b)$ 大小不能确定

二、填空题

9、曲线 $y=-x^3+3x+2$ 在点 x=0 处的切线方程为_ $y=3x+2$ ____

10、函数 $f(x)=a\ln x+x$ 在 $x=1$ 处取得极值，则 a 的值为_-1____

11、已知函数 $f(x)=\ln x-f'(1)x^2+3x-4$，则 $f'(1)=$__4/3______.

解析：∵$f'(x)=\frac{1}{x}-2f'(1)x+3$，$f'(1)=1-2f'(1)+3$，∴$f'(1)=4/3$.

12、过点(0,-1)曲线 $y=-x^3+3x^2$ 的切线方程为_____

解：设切点$(x_0,-x_0{}^3+3x_0{}^2), y'=-3x^2+6x, k=-3x_0{}^2+6x_0$
切线$y=(-3x_0{}^2+6x_0)(x-x_0)-x_0{}^3+3x_0{}^2=(-3x_0{}^2+6x_0)x+2x_0{}^3-3x_0{}^2$
$2x_0{}^3-3x_0{}^2=-1, x_0=1$或$x_0=-\frac{1}{2}, k=3$或$k=-\frac{15}{4}$
$y=3x-1$或$y=-\frac{15}{4}x-1$

三、解答题

13、已知函数 $f(x)=x(x-a)^2, a$ 是大于零的常数

(Ⅰ)当 a＝1 时，求 $f(x)$ 的极值；

（Ⅱ）若函数 $f(x)$ 在区间[1,2]上单调递增，求实数 a 的取值范围

解：(Ⅰ)当 a＝1 时，$f(x)=x(x-1)^2=x^3-2x^2+x$

$f'(x)=3x^2-4x+1=(3x-1)(x-1)$

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\frac{1}{3}, x_2=1$，

x	$(-\infty,\frac{1}{3})$	$\frac{1}{3}$	$(\frac{1}{3},1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	递增	极大	递减	极小	递增

于是 $f(x)_{极大}=f(\frac{1}{3})=\frac{4}{27}, f(x)_{极小}=f(1)=0$

（Ⅱ） $f(x)=x(x-a)^2=x^3-2ax^2+a^2x$ $f'(x)=3x^2-4ax+a^2=(3x-a)(x-a)$

令 $f'(x)=0$ 得 $x_1=\frac{a}{3}, x_2=a$，函数 $f(x)$ 在区间[1,2]上单调递增

则$[1,2]\subseteq(-\infty,\frac{a}{3}]$或$[1,2]\subseteq[a,+\infty)$，于是$\frac{a}{3}\ge 2$或$0<a\le 1$故$a\ge 6$或$0<a\le 1$

14、已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+bx$, x=-1 是 $f(x)$ 的极值点

（I）试用含 a 的代数式表示 b；（Ⅱ）求 $f(x)$ 的单调区间；

解：(I）依题意，得 $f'(x)=x^2+2ax+b$，由 $f'(-1)=1-2a+b=0$ 得 $b=2a-1$

（Ⅱ）由（I）得 $f(x)=\frac{1}{3}x^3+ax^2+(2a-1)x$

故 $f'(x)=x^2+2ax+2a-1=(x+1)(x+2a-1)$

令 $f'(x)=0$，则 $x=-1$ 或 $x=1-2a$

当 $a>1$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,1-2a)$ 和 $(-1,+\infty)$，单调减区间为 $(1-2a,-1)$；

当 $a=1$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 R;

当 $a<1$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(-\infty,-1)$ 和 $(1-2a,+\infty)$，单调减区间为 $(-1,1-2a)$

15、若存在过点(1,0)的直线与曲线 $y=x^3$ 和 $y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$ 都相切，求 a 的值

解：设过(1,0)的直线与 $y=x^3$ 相切于点$(x_0，x_0^3)$，所以切线方程为 $y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$，即 $y=3x_0^2x-2x_0^3$，又(1,0)在切线上，则 $x_0=0$ 或 $x_0=\frac{3}{2}$,

当 $x_0=0$ 时，切线 $y=0$ 与 $y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$ 相切可得 $a=-\frac{25}{64}$,

当 $x_0=\frac{3}{2}$时，切线 $y=\frac{27}{4}x-\frac{27}{4}$与 $y=ax^2+\frac{15}{4}x-9$ 相切可得 $a=-1$.

16、已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（**a>b>0**）的离心率为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$，椭圆的弦 AB 的中点坐标为(2,1)，（1）求弦 AB 所在的直线（2）若 ΔOAB 的面积为 $2\sqrt{3}$ 椭圆方程

解：（1）$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2},c=\frac{\sqrt{2}}{2}a,b^2=\frac{1}{2}a^2$,椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{2y^2}{a^2}=1,x^2+2y^2=a^2$

设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$,则

$x_1^{\ 2}+2y_1^{\ 2}=a^2,x_2^{\ 2}+2y_2^{\ 2}=a^2,(x_1+x_2)(x_1-x_2)+2(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0,$

AB 的中点坐标为(2,1)，故 $x_1+x_2=4,y_1+y_2=2,$

$4(x_1-x_2)+4(y_1-y_2)=0,$于是 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-1,k_{AB}=-1$

直线 AB 为：$y-1=-(x-2),y=-x+3$

（2）O 到直线 AB 的距离是 $d=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}|AB|d=\frac{3\sqrt{2}}{4}|AB|=2\sqrt{3},|AB|=\frac{4\sqrt{6}}{3}$,

$|AB|=\sqrt{(1+k^2)(x_1-x_2)^2}=\sqrt{2[(x_1+x_2)^2-4x_1x_2]}=\frac{4\sqrt{6}}{3}$

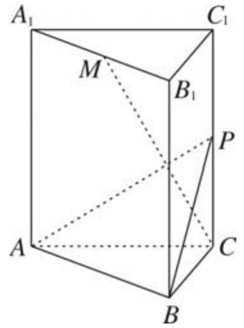
联立 $\begin{cases} y=-x+3 \\ x^2+2y^2=a^2 \end{cases}$ 消 y 得 $3x^2-12x+18-a^2=0$

即 $x_1+x_2=4,x_1x_2=\frac{18-a^2}{3}$,$2[16-\frac{4(18-a^2)}{3}]=\frac{32}{3}$

$4-\frac{18-a^2}{3}=\frac{4}{3},12-18+a^2=4,a^2=10,$

此时$\Delta>0,$于是椭圆 $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{5}=1$

17、如图，三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面是边长为 4 正三角形，AA_1⊥平面 ABC，$AA_1=2\sqrt{6}$，M 为 A_1B_1 的中点.



（I）求证：MC⊥AB；

（II）在棱 CC_1 上是否存在点 P，使得 $MC\perp$ 平面 ABP？若存在，确定点 P 的位置；若不存在，说明理由.

（III）若点 P 为 CC_1 的中点，求二面角 $B-AP-C$ 的余弦值.

解：（I）取 AB 中点 O，连接 OM，OC.

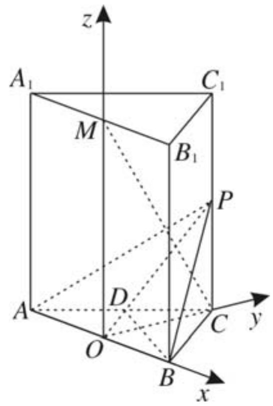
∵M 为 A_1B_1 中点，∴MO∥A_1A，又 A_1A⊥平面 ABC，∴MO⊥平面 ABC，∴MO⊥AB…….2 分

∵△ABC 为正三角形，∴AB⊥CO　又 MO∩CO=O，∴AB⊥平面 OMC

又∵MC⊂平面 OMC　　∴AB⊥MC……………5 分

（II）以 O 为原点，以 $\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OM}$ 的方向分别为 x 轴，y 轴，z 轴的正方向，建立空间直角坐标系．如图.依题意

$O(0,0,0),A(-2,0,0),B(2,0,0),C(0,2\sqrt{3},0),M(0,0,2\sqrt{6})$.　　……………6 分



设 $P(0,2\sqrt{3},t)(0\le t\le 2\sqrt{6})$，

则 $\overrightarrow{MC}=(0,2\sqrt{3},-2\sqrt{6}),\overrightarrow{AB}=(4,0,0),\overrightarrow{OP}=(0,2\sqrt{3},t)$.　…………7 分

要使直线 $MC\perp$ 平面 ABP，只要 $\begin{cases}\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{OP}=0,\\ \overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{AB}=0.\end{cases}$

即 $(2\sqrt{3})^2-2\sqrt{6}t=0$，解得 $t=\sqrt{6}$.　　　　……………8 分

$\therefore P$ 的坐标为 $(0,2\sqrt{3},\sqrt{6})$.

∴当 P 为线段 CC_1 的中点时，$MC\perp$ 平面 ABP.　……………10 分

（III）取线段 AC 的中点 D，则 $D(-1,\sqrt{3},0)$，易知 $DB\perp$ 平面 A_1ACC_1，

故 $\overrightarrow{DB}=(3,-\sqrt{3},0)$ 为平面 PAC 的一个法向量．……….11 分

又由（II）知 $\overrightarrow{MC}=(0,2\sqrt{3},-2\sqrt{6})$ 为平面 PAB 的一个法向量.　　……………12 分

设二面角 $B-AP-C$ 的平面角为 α，则

$|\cos\alpha|=\dfrac{|\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{DB}|}{|\overrightarrow{MC}|\cdot|\overrightarrow{DB}|}=\left|\dfrac{3\times0-\sqrt{3}\times2\sqrt{3}-0\times2\sqrt{6}}{2\sqrt{3}\times6}\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$. ∴二面角 $B-AP-C$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{6}$.　　　　　……………13 分