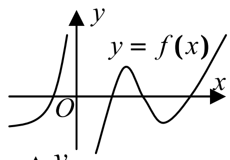
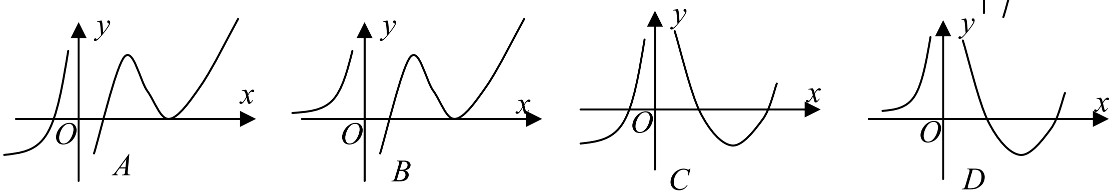
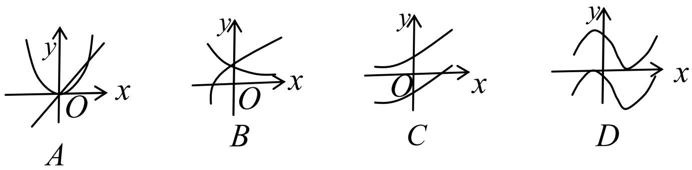
导数练习二(廖老师出题)



1、如图，函数 $y=f(x)$ 的图象如图，则和 $y=f'(x)$ 的图象可能是(　　)



2、$y=f(x), y=f'(x)$ 的图象画在同一坐标系内，不可能的是(　　)



3、$y=x+2\cos x$, 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上取得最大值时，x 的值是(　　)

A、0　B、$\frac{\pi}{6}$　C、$\frac{\pi}{3}$　B、$\frac{\pi}{2}$

4、若函数 $f(x)=a(x^3-x)$ 的单调区间为 $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，则 a 的范围是(　　)

A、$a>0$　B、$-1<a<0$　C、$a>1$　B、$0<a<1$

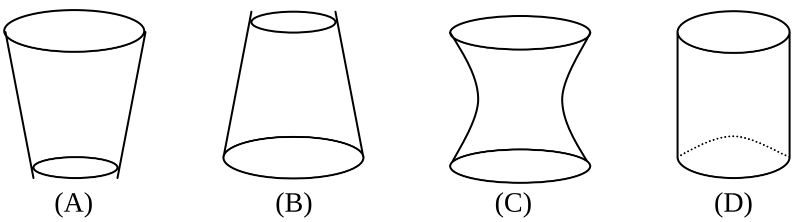
5、设直线 $x=t$ 与函数 $f(x)=\mathbf{x}^2$， $g(x)=\ln x$ 交于 M，N，则当|MN|达到最小值是 t 的值为(　　)

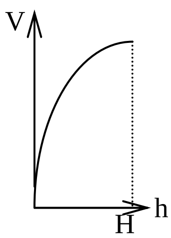
A、1　B、$\frac{1}{2}$　C、$\frac{\sqrt{5}}{2}$　B、$\frac{\sqrt{2}}{2}$

6、函数 $y=\ln x$ 上的点到直线 $x-y+2=0$ 的距离的最小值是(　　)

（A）$\frac{3}{2}\sqrt{2}$　（B）$\frac{2}{3}\sqrt{3}$　（C）$2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2$　（D）$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

7、向高为 H 的水瓶中注水, 注满为止. 如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图象如右图所示, 那么水瓶的形状是(　　)





8．若函数 $y=e^{ax}+3x; x\in R$ 有大于零的极值点，则(　　)

A． $a<-3$　B． $a>-3$　C． $a<-\frac{1}{3}$　D． $a>-\frac{1}{3}$

9、已知函数 $f(x)=ax^3+cx$，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 -2. 则 $f(x)=$______

10．若方程 $x^3+3x^2-9x-m=0$ 只有一个实根，则 m 的范围是______+___.

11、设函数 $f(x)=-\mathbf{x}^2+mx+1$ 在区间 $[-2,-1]$ 上的最大值就是函数的极大值，则 m 的取值范围是______

12、等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1, a_4=2$，函数 $f(x)=x(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$，则 $f'(0)=$______

13、已知函数 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$.（I）求 $f(x)$ 的单调递减区间;

（II）若 $f(x)$ 在区间[－2，2]上的最大值为 20，求它在该区间上的最小值.

14、已知函数 $f(x)=e^{x}(x^{2}+ax+9-a)$

(1)若在 x=1 处 $f(x)$ 与 $g(x)=e^{x}$ 的切线互相平行，求 a　(2)若 $f(x)$ 在(0,+∞)内是递增，求 a 的范围

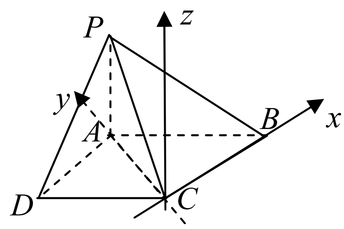
15、销售某种商品，每日的销售量 y (单位：千克)与销售价格 x (单位：元/千克)满足 $y=\dfrac{a}{x-3}+10(x-6)^{2}$，其中 $3<x<6$，a 为常数，已知销售价格为 5 元/千克时，每日可售出该商品 11 千克.

(Ⅰ) 求 a 的值;

(Ⅱ) 若该商品的成本为 3 元/千克, 试确定销售价格 x 的值,使商场每日销售该商品所获得的利润最大.

16、如图，四棱锥 P-ABCD 中，PA⊥底面 ABCD,AB//CD,AD=CD=1, $\angle BAD=120°,\angle ACB=90°$,

(1)求证：BC⊥平面 PAC (2)若二面角 D-PC-A 的余弦为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，求 PA 的长。



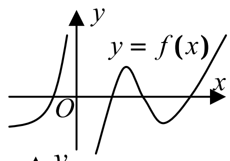
17、已知曲线 C：$(5-m)x^{2}+(m-2)y^{2}=8(m\in\mathbf{R})$.

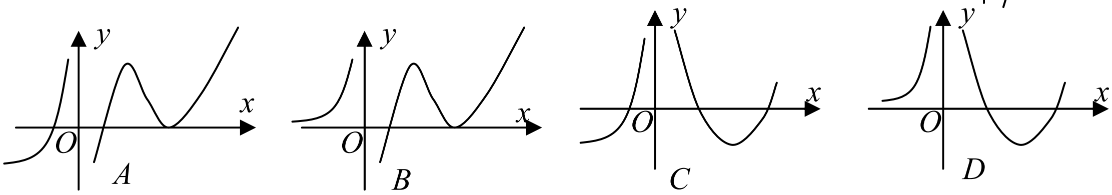
(1)若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆，求 m 的取值范围；

(2)设 $m=4$，曲线 C 与 y 轴的交点为 A，B(点 A 位于点 B 的上方)，直线 $y=kx+4$ 与曲线 C 交于不同的两点 M，N，直线 $y=1$ 与直线 BM 交于点 G.求证：A，G，N 三点共线.

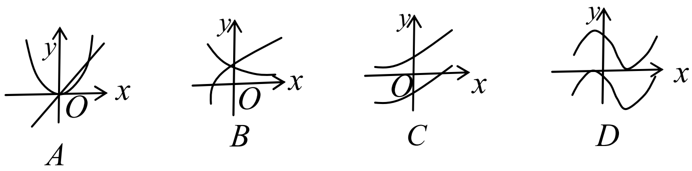
导数练习二(廖老师出题)

1、如图，函数 $y=f(x)$ 的图象如图，则和 $y=f'(x)$ 的图象可能是(　D　)





2、$y=f(x), y=f'(x)$ 的图象画在同一坐标系内，不可能的是(D　)



3、$y=x+2\cos x$, 在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上取得最大值时，x 的值是(B　)

A、0　B、$\frac{\pi}{6}$　C、$\frac{\pi}{3}$　B、$\frac{\pi}{2}$

4、若函数 $f(x)=a(x^3-x)$ 的单调区间为 $(-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3})$，则 a 的范围是(　A)

A、$a>0$　B、$-1<a<0$　C、$a>1$　B、$0<a<1$

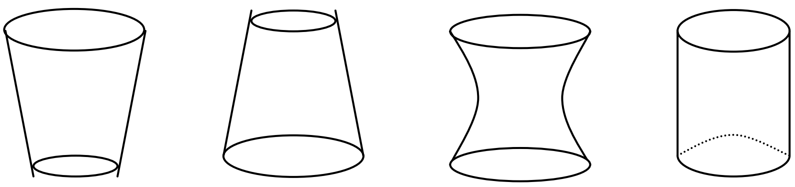
5、设直线 $x=t$ 与函数 $f(x)=\mathbf{x}^2$，$g(x)=\ln x$ 交于 M，N，则当|MN|达到最小值是 t 的值为(D　)

A、1　B、$\frac{1}{2}$　C、$\frac{\sqrt{5}}{2}$　D、$\frac{\sqrt{2}}{2}$

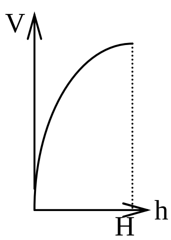
6、函数 $y=\ln x$ 上的点到直线 $x-y+2=0$ 的距离的最小值是(　 A　)

（A）$\frac{3}{2}\sqrt{2}$　（B）$\frac{2}{3}\sqrt{3}$　（C）$2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\ln 2$　（D）$\frac{3\sqrt{3}}{2}$

7、向高为 H 的水瓶中注水, 注满为止. 如果注水量 V 与水深 h 的函数关系的图象如右图所示, 那么水瓶的形状是(　B　)



(A)　(B)　(C)　(D)



8. 若函数 $y=e^{ax}+3x; x\in R$ 有大于零的极值点，则(　A　)A. $a<-3$　B. $a>-3$　C. $a<-\frac{1}{3}$　D. $a>-\frac{1}{3}$

9、已知函数 $f(x)=ax^3+cx$，当 $x=1$ 时，$f(x)$ 取得极小值 -2. 则 $f(x)=$ x^3-3x__

10．若方程 x^3+3x^2-9x－m=0 只有一个实根，则 m 的范围是(-∞，-5)∪(27, +∞)　.

11、设函数 $f(x)=-\mathbf{x}^2+mx+1$ 在区间 $[-2,-1]$ 上的最大值就是函数的极大值，则 m 的取值范围是_(-4,-2)_

12、等比数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1, a_4=2$，函数 $f(x)=x(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$，则 $f'(0)=$_4_

13、已知函数 $f(x)=-x^3+3x^2+9x+a$．(I)求 $f(x)$ 的单调递减区间；

（Ⅱ）若 $f(x)$ 在区间[一2，2]上的最大值为 20，求它在该区间上的最小值．

解：(I)　$f'(x)=-3x^2+6x+9$．令 $f'(x)=0$，解得 $x_1=-1$，　$x_2=3$

函数 $f(x)$ 的递减区间为（$-\infty$，-1），(3，$+\infty$)．

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,3)$	3	$(3,+\infty)$
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	减	极小	增	极大	减

（II）在区间[一2，2]上

x	$[-2,-1)$	-1	$(-1,2]$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	减	极小	增

因为 $f(-2)=2+a$，$f(2)=22+a$，，$f(2)>f(-2)$．$f(x)_{\max}=f(2)=a+22=20, a=-2, f(x)_{\min}=f(-1)=-5+a=-7$

14、已知函数 $f(x)=e^x(x^2+ax+9-a)$

(1)若在 x=1 处 $f(x)$ 与 $g(x)=e^x$ 的切线互相平行，求 a　(2)若 $f(x)$ 在$(0,+\infty)$内是递增，求 a 的范围

解：(1)　$f'(x)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+9-a)e^x=e^x[x^2+(a+2)x+9]$，$g'(x)=e^x$

$f'(1)=(2x+a)e^x+(x^2+ax+9-a)e^x=e^x[x^2+(a+2)x+9]$

$f'(1)=g'(1), e(a+12)=e, a=-11$

(2)　$f'(x)=e^x[x^2+(a+2)x+9]>0$ 对 $x\in(0,+\infty)$ 恒成立

$x^2+(a+2)x+9\geq 0$，$x+\dfrac{9}{x}\geq -a-2$，$(x+\dfrac{9}{x})_{\min}\geq -a-2$

因 $x+\dfrac{9}{x}\geq 2\sqrt{9}=6$,当且仅当$x=3$时取“ ＝”，于是 $(x+\dfrac{9}{x})_{\min}=6$　故 $6\geq -a-2, a\geq -8$

15、销售某种商品，每日的销售量 y (单位：千克)与销售价格 x (单位：元/千克)满足 $y=\dfrac{a}{x-3}+10(x-6)^2$，

其中 $3<x<6$，a 为常数，已知销售价格为 5 元/千克时，每日可售出该商品 11 千克.

(Ⅰ) 求 a 的值；

(Ⅱ) 若该商品的成本为 3 元/千克, 试确定销售价格 x 的值,使商场每日销售该商品所获得的利润最大.

解：(Ⅰ)因为 $x=5$ 时 $y=11$，所以 $\dfrac{a}{2}+10=11\Rightarrow a=2$；

(Ⅱ)　$y=\dfrac{2}{x-3}+10(x-6)^2$，所以商场每日销售该商品所获得的利润：

$f(x)=(x-3)[\dfrac{2}{x-3}+10(x-6)^2]=2+10(x-3)(x-6)^2, 3<x<6$；

$f'(x)=10[(x-6)^2+2(x-3)(x-6)]=30(x-4)(x-6)$，令 $f'(x)=0$ 得 $x=4$

x	(3,4)	4	(4,6)
y'	+	0	+
y	增	极小	增

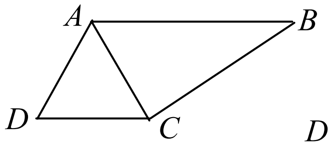
所以当 $x=4$ 时函数 $f(x)_{\max}=f(4)=42$

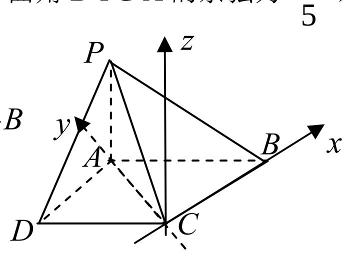
答：当销售价格 $x=4$ 时,商场每日销售该商品所获得的利润最大，最大值为 42.

16、如图，四棱锥 P-ABCD 中，PA⊥底面 ABCD,AB//CD,AD=CD=1,

$\angle BAD=120°,\angle ACB=90°$,(1)求证：BC⊥平面 PAC (2)若二面角 D-PC-A 的余弦为 $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$，求 PA 的长。解：

(1) PA⊥底面 ABCD，BC⊂底面 ABCD
于是 PA⊥BC，又 BC⊥AC，PA∩AC=A
于是 BC⊥平面 PAC
(2)如图建系 C-xyz,设 PA=h





C(0,0,0)，$D(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0)$,P(0,1,h),

于是 $\overrightarrow{CD}=(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},0),\overrightarrow{CP}=\left(0,1,h\right)$,设平面 PDC 的一个法向量是 $\vec{m}=(x,y,z)$

则 $\begin{cases}\vec{m}\cdot\overrightarrow{CD}=0\\ \vec{m}\cdot\overrightarrow{CP}=0\end{cases}$, $\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{x}+\dfrac{1}{2}\text{y}=0\\ y+hz=0\end{cases}$, 令 $y=\sqrt{3}h$, 得 $x=h,z=-\sqrt{3}$ 于是 $\vec{m}=(\text{h},\sqrt{3}h,-\sqrt{3})$

由(1)知 $\overrightarrow{CB}=(\sqrt{3},0,0)$ 是平面 PAC 的一个法向量

于是 $|\cos<\vec{m},\overrightarrow{CP}>|=\dfrac{|\vec{m}\cdot\overrightarrow{CP}|}{|\vec{m}||\overrightarrow{CP}|}=\dfrac{\sqrt{3}h}{\sqrt{3}\sqrt{h^2+3h^2+3}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, $h=\sqrt{3}$ 答：PA 的长 $\sqrt{3}$

17、已知曲线 C：$(5-m)x^2+(m-2)y^2=8(m\in\mathbf{R})$.

(1)若曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆，求 m 的取值范围；

(2)设 $m=4$，曲线 C 与 y 轴的交点为 A，B(点 A 位于点 B 的上方)，直线 $y=kx+4$ 与曲线 C 交于不同的两点 M，N，直线 $y=1$ 与直线 BM 交于点 G.求证：A，G，N 三点共线.

(1)曲线 C 是焦点在 x 轴上的椭圆，

当且仅当 $\begin{cases}5-m>0,\\ m-2>0,\\ \dfrac{8}{5-m}>\dfrac{8}{m-2},\end{cases}$ 解得 $\dfrac{7}{2}<m<5$，所以 m 的取值范围是 $\left(\dfrac{7}{2},\ 5\right)$.

(2)当 $m=4$ 时，曲线 C 的方程为 $x^2+2y^2=8$，点 A，B 的坐标分别为(0,2)，(0，－2) (5 分)

由 $\begin{cases}y=kx+4,\\ x^2+2y^2=8,\end{cases}$ 得 $(1+2k^2)x^2+16kx+24=0$. (6 分)

因为直线与曲线 C 交于不同的两点，所以 $\Delta=(16k)^2-4(1+2k^2)\times 24>0$，即 $k^2>\dfrac{3}{2}$. (7 分)

设点 M，N 的坐标分别为 $(x_1，y_1)$，$(x_2，y_2)$，则 $y_1=kx_1+4$，$y_2=kx_2+4$，

$x_1+x_2=\dfrac{-16k}{1+2k^2}$，$x_1x_2=\dfrac{24}{1+2k^2}$.

直线 BM 的方程为 $y+2=\dfrac{y_1+2}{x_1}x$，点 G 的坐标为 $\left(\dfrac{3x_1}{y_1+2},\ 1\right)$.

因为直线 AN 和直线 AG 的斜率分别为 $k_{AN}=\dfrac{y_2-2}{x_2}$，$k_{AG}=-\dfrac{y_1+2}{3x_1}$， (11 分)

所以 $k_{AN}-k_{AG}=\dfrac{y_2-2}{x_2}+\dfrac{y_1+2}{3x_1}=\dfrac{kx_2+2}{x_2}+\dfrac{kx_1+6}{3x_1}$

$=\dfrac{4}{3}k+\dfrac{2(x_1+x_2)}{x_1x_2}=\dfrac{4}{3}k+\dfrac{2\times\dfrac{-16k}{1+2k^2}}{\dfrac{24}{1+2k^2}}=0$.即 $k_{AN}=k_{AG}$. (13 分)

故 A，G，N 三点共线.