定积分练习(廖老师出题)

一、求定积分

1、设 $f(x)=\begin{cases}x^2，x\in[0，1]，\\ \frac{1}{x}，x\in(1，e]\end{cases}$　求 $\int_0^e f(x)dx$　　2、$\int_2^3\frac{1-x}{x^2}dx$

3、$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 xdx$　　　　4、$\int_0^2|x^2-1|dx$，

5、$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin 2x}dx$　　　　6、$\int_0^1(\sqrt{1-(x-1)^2}-x)dx$

二、求面积

1、由曲线 $y=3-x^2$ 与 $y=2x$ 围成的图形的面积

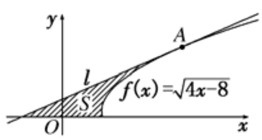
2、由曲线 $y=x^2+4$ 与 $y=5x, x=0, x=4$ 围成的图形的面积

3、由直线 $y=x-4$ 与抛物线 $y^2=2x$ 所围成的图形的面积是

4、过原点的直线 l 与抛物线 $y=x^2-2ax(a>0)$ 所围成的图形的面积为 $\frac{9}{2}a^3$，求直线 l 的方程

5、如图，过点 $A(6,4)$ 作曲线 $f(x)=\sqrt{4x-8}$ 的切线 l.

(1)求切线 l 的方程；(2)求切线 l、x 轴及曲线 $f(x)=\sqrt{4x-8}$ 所围成的封闭图形的面积 S.



三、物理问题

1、若路程 S 与时间 t 的关系是 $s=t^3+2t^2+3t+5$，则速度 v 与时间 t 的关系是_______

2、甲乙物体从相距 5m 的 A 与 B 两地同时出发同向而行甲在乙后，甲速度 $v=3t^2+1$ m/s，乙速度 $v=10t$ (v, t 单位 m/s，s), 求追上时甲走的路程

3、一物体按规律 $x=bt^3$ 做直线运动，式中 x 为位移，t 为时间。阻力与速度的平方成正比(比例系数为 k),试求物体由 $x=0$ 到 $x=a$ 时阻力作的功

四、设出代入

1、已知 $f(x)$ 是一次函数，且 $f(x)=\mathrm{x}+2\int_0^1 f(t)dt$，求 $f(x)$

2、若 $f(x)$ 的图象关于原点对称，则当 $x>0$ 时 $f(x)=x^2-2x+3$

(1)求 $f(x)$ (2) $\int_{-2}^{-1} f(x)dx$

3、若 $g(x)$ 与 $f(x)=e^x$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称

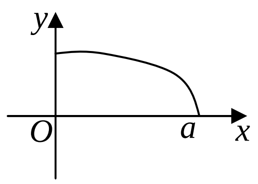
(1)求 $g(x)$ (2) $\int_0^2 g(x)dx$

五、杂题

1、已知和式 $S=\dfrac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(\mathrm{p}>0)$,当 $n\to\infty$ 时, $S\to A$,则 A 可用定积分表示为

A、$\int_0^1 \dfrac{1}{x}dx$ B、$\int_0^1 x^p dx$ C、$\int_0^1 (\dfrac{1}{x})^p dx$ D、$\int_0^1 (\dfrac{x}{n})^p dx$

2、若 $y=f(x)$ 的图象如图所示，定义 $F(x)=\int_0^x f(\mathrm{t})\,\mathrm{dt}, \mathrm{x}\in[0,a]$，则下列对 $F(x)$ 的性质描述正确的有____________



(1) $F(x)$ 是 $[0,a]$ 上的增函数；(2) $F'(a)=0$

(3) $F(x)$ 是 $[0,a]$ 上的减函数；(4) $\exists x_0\in[0,a]$ 使得 $F(1)=af(x_0)$

定积分练习(廖老师出题)

一、求定积分

1、设 $f(x)=\begin{cases} x^2，x\in[0，1]， \\ \dfrac{1}{x}，x\in(1，e] \end{cases}$ $\int_0^e f(x)dx$

解：$\int_0^e f(x)dx=\int_0^1 x^2dx+\int_1^e \frac{1}{x}dx=\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1+\ln x\Big|_1^e=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

2、$\int_2^3 \frac{1-x}{x^3}dx$

解：$\int_2^3 \frac{1-x}{x^3}dx=\int_2^3(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2})dx=(-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{x})\Big|_2^3=-\frac{1}{2}(\frac{1}{9}-\frac{1}{4})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{2})=-\frac{7}{72}$

3、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx$

解：$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\times 0}{2}=\frac{\pi}{4}$

4、$\int_0^2 |x^2-1|dx$，

解:$\int_0^2 |x^2-1|dx=\int_0^1(1-x^2)dx+\int_1^2(x^2-1)dx=(x-\frac{1}{3}x^2)\Big|_0^1+(\frac{1}{3}x^2-x)\Big|_1^2=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\times 3-1=\frac{2}{3}$

5、$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}dx$

解:$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin 2x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x-\cos x|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos x-\sin x)dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-\cos x)dx$

$=(\sin x+\cos x)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}-(\sin x+\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-1-(1-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2})=2\sqrt{2}-2$

6、$\int_0^1(\sqrt{1-(x-1)^2}-x)dx$

解：原式$=\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}dx-\int_0^1 xdx,\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}dx=\frac{\pi}{4},\int_0^1 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$,原式$=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

二、求面积

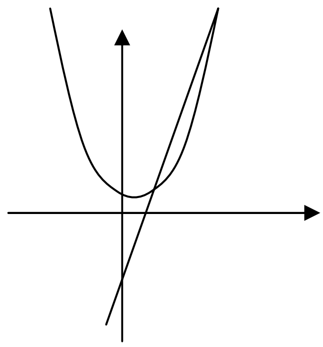
1、由曲线 $y=3-x^2$ 与 $y=2x$ 围成的图形的面积

解：联立 $\begin{cases} y=3-x^2 \\ y=2x \end{cases}$ 消 y 得 $x^2+2x-3=0$，解得 $x_1=-3, x_2=1$

面积 $S=\int_{-3}^{1}(3-x^2-2x)dx=(3x-\frac{x^3}{3}-x^2)\Big|_{-3}^{1}=\frac{32}{3}$

2、由曲线 $y=x^2+4$ 与 $y=5x,x=0,x=4$ 围成的图形的面积

解：联立 $\begin{cases}y=x^2+4\\y=5x\end{cases}$ 消 y 得 $x^2-5x+4=0$，解得 $x_1=1,x_2=4$



$$S=\int_0^1(x^2+4-5x)dx+\int_1^4(5x-x^2-4)dx$$
$$=(\frac{x^3}{3}+4x-\frac{5}{2}x^2)\Big|_0^1+(\frac{5}{2}x^2-\frac{x^3}{3}-4x)\Big|_1^4$$
$$=\frac{1}{3}+4-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}(16-1)-\frac{64-1}{3}-4(4-1)=\frac{19}{3}$$

3、由直线 $y=x-4$ 与抛物线 $y^2=2x$ 所围成的图形的面积是

解：联立 $\begin{cases}y=x-4\\y^2=2x\end{cases}$ 解得交点(2,-2), (8,4)，

$$S=\int_{-2}^{4}(y+4-\frac{y^2}{2})dy=(\frac{y^2}{2}+4y-\frac{y^3}{6})\Big|_{-2}^{4}=\frac{12}{2}+4\times6-\frac{72}{6}=18$$

4、过原点的直线 l 与抛物线 $y=x^2-2ax(a>0)$ 所围成的图形的面积为 $\frac{9}{2}a^3$，求直线 l 的方程

解：显然直线 l 的斜率存在，设 $l:y=kx$，联立 $\begin{cases}y=kx\\y=x^2-2ax\end{cases}$ 消 y 得 $x^2-2ax=kx$

解得 $x_1=0,x_2=k+2a$

$$当x_1<x_2时,S=\int_0^{k+2a}[kx-(x^2-2ax)]dx=\int_0^{k+2a}[(k+2a)x-x^2]dx$$
$$=(\frac{k+2a}{2}x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_0^{k+2a}=\frac{(k+2a)^3}{2}-\frac{(k+2a)^3}{3}=\frac{(k+2a)^3}{6}=\frac{9}{2}a^3,k=a$$

$$当x_1>x_2时,S=\int_{k+2a}^{0}[kx-(x^2-2ax)]dx=(\frac{k+2a}{2}x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_{k+2a}^{0}$$
$$-\frac{(k+2a)^3}{6}=\frac{9}{2}a^3,k+2a=-3a,k=-5a$$

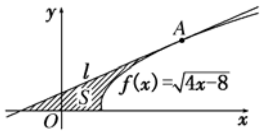
综上，$l:y=ax,y=-5ax$

5、如图，过点$A(6,4)$作曲线$f(x)=\sqrt{4x-8}$的切线l.

(1)求切线l的方程；

(2)求切线l、x轴及曲线$f(x)=\sqrt{4x-8}$所围成的封闭图形的面积S.

解：(1)$\because f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}$，$\therefore f'(6)=\dfrac{1}{2}$，



$\therefore$切线l的方程为$y-4=\dfrac{1}{2}(x-6)$，即$x-2y+2=0$.

(2)令$f(x)=0$，则$x=2$，

令$y=\dfrac{1}{2}x+1=0$，则$x=-2$.

故$S=\int_{-2}^{6}\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)dx-\int_{2}^{6}\sqrt{4x-8}dx$

$=\left(\dfrac{1}{4}x^2+x\right)\Big|_{-2}^{6}-\dfrac{1}{6}(4x-8)^{\frac{3}{2}}\Big|_{2}^{6}=\dfrac{16}{3}$.

三、物理问题

1、若路程S与时间t的关系是$s=t^3+2t^2+3t+5$，则速度v与时间t的关系是_______

解：$v=s'=3t^2+4t+3$

2、甲乙物体从相距5m的A与B两地同时出发同向而行甲在乙后，甲速度$v=3t^2+1$，乙速度$v=10t$ (v, t单位m/s，s), 求追上时甲走的路程

解：设追上用的时间为xs

则$\int_0^x(3t^2+1)dt=\int_0^x 10tdt+5$，$(t^3+t)\Big|_0^x=5t^2\Big|_0^x+5, x^3+x=5x^2+5, x=5$

于是追上时甲走的路程$x^3+x=125+5=130$

3、一物体按规律$x=bt^3$做直线运动，式中x为位移，t为时间。阻力与速度的平方成正比(比例系数为k),试求物体由$x=0$到$x=a$时阻力作的功

解：速度$v=x'=3bt^2$，阻力$f=kv^2=9b^2kt^4$，当$x=a$时$bt^3=a, t=(\dfrac{a}{b})^{\frac{1}{3}}$

功$w=\int_0^{(\frac{a}{b})^{\frac{1}{3}}}fvdt=\int_0^{(\frac{a}{b})^{\frac{1}{3}}}27b^3kt^6dt=\dfrac{27b^3kt^7}{7}\Bigg|_0^{(\frac{a}{b})^{\frac{1}{3}}}=\dfrac{27ka^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}}}{7}$

四、设出代入

1、已知$f(x)$是一次函数，且$f(x)=x+2\int_0^1 f(t)dt$，求$f(x)$

解：设$f(x)=kx+b(k\neq 0)$

则 $f(x)=\mathrm{x}+2\int_0^1(kt+b)dt=\mathrm{x}+2\left(\frac{1}{2}kt^2+bt\right)\Big|_0^1=\mathrm{x}+2(\frac{1}{2}k+b)$

于是 $k=1,b=k+2b,b=-1$，于是 $f(x)=x-1$

2、若 $f(x)$ 的图象关于原点对称，则当 $x>0$ 时 $f(x)=x^2-2x+3$

(1)求 $f(x)$ (2) $\int_{-2}^{-1}f(x)dx$

解：(1) $f(0)=0$，当 $x<0$ 时， $f(x)=-f(-x)=-(x^2+2x+3)$

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+3(\mathrm{x}>0)\\0(\mathrm{x}=0)\\-(x^2+2x+3)(\mathrm{x}<0)\end{cases},$$

$$\int_{-2}^{-1}f(x)dx=-\int_{-2}^{-1}(x^2+2x+3)dx=-\left(\frac{x^3}{3}+x^2+3x\right)\Big|_{-2}^{-1}=-(\frac{-1+8}{3}-3+3)=-\frac{7}{3}$$

3、若 $g(x)$ 与 $f(x)=e^x$ 的图象关于直线 $x=3$ 对称

(1)求 $g(x)$ (2) $\int_0^2 g(x)dx$

(1) $g(x)=f(6-x)=e^{6-x}$，(2) $\int_0^2 g(x)dx=\int_0^2 e^{6-x}dx=-e^{6-x}|_0^2=-(e^4-e^6)=e^6-e^4$

五、杂题

1、和式 $S=\dfrac{1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}(\mathrm{p}>0)$,当$n\to\infty$时, $S\to A$,则A可用定积分表示为(B)

A、$\int_0^1\frac{1}{x}dx$ B、$\int_0^1 x^p dx$ C、$\int_0^1(\frac{1}{x})^p dx$ D、$\int_0^1(\frac{x}{n})^p dx$

2、若 $y=f(x)$ 的图象如图所示，定义 $F(x)=\int_0^x f(\mathrm{t})\mathrm{dt},\mathrm{x}\in[0,a]$，则下列对 $F(x)$ 的性质描述正确的有__(1) (2) (4)__

(1) $F(x)$是$[0,a]$上的增函数；(2) $F'(a)=0$ (3) $F(x)$是$[0,a]$上的减函数；

(4) $\exists x_0\in[0,a]$ 使得 $F(a)=af(x_0)$