数列练习 (廖老师出题)

1、在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，$a_4=5$，则$\{a_n\}$的前 5 项和 $S_5=$(　　)

A．7　　B．15　　C．20　　D．25

2、公比为 2 的等比数列$\{a_n\}$的各项都是正数，且 $a_3a_{11}=16$，则 $a_5=$(　　)

A．1　　B．2

C．4　　D．8

3、等差数列$\{a_n\}$中，$S_{15}=90$, a_8 等于　　（　　）

A．3　　B．4　　C．6　　D．12

4、设等比数列$\{a_n\}$中，a_5，a_3，a_4 成等差数列．则公比是(　　)

A．1　　B．-2　　C．1 或-2　　D．-1 或 2

5、等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n，T_n，若$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n}{3n+1}$，则$\dfrac{a_n}{b_n}=$(　　)

A.$\dfrac{2}{3}$　　B.$\dfrac{2n-1}{3n-1}$　　C.$\dfrac{2n+1}{3n+1}$　　D.$\dfrac{2n-1}{3n+4}$

6．已知$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列，S_n 是$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $9S_3=S_6$，则数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前 5 项和为(　　)

A.$\dfrac{15}{8}$或 5　　B.$\dfrac{31}{16}$或 5　　C.$\dfrac{31}{16}$　　D.$\dfrac{15}{8}$

7、已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_4+a_7=2$，$a_5a_6=-8$，则 $a_1+a_{10}=$(　　)

A．7　　B．5　　C．-5　　D．-7

8、设数列$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列，$a_1=1$ 且 a_1，a_3，a_6 成等比数列，则$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 等于(　　)

A.$\dfrac{n^2}{8}+\dfrac{7n}{8}$　　B.$\dfrac{n^2}{4}+\dfrac{7n}{4}$　　C.$\dfrac{n^2}{2}+\dfrac{3n}{4}$　　D．n^2+n

9．数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$\{b_n\}$是等差数列，且 $a_6=b_7$，则有(　　)

A．$a_3+a_9\leqslant b_4+b_{10}$　　B．$a_3+a_9\geqslant b_4+b_{10}$

C．$a_3+a_9\neq b_4+b_{10}$　　D．a_3+a_9 与 b_4+b_{10} 的大小不确定

10．已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\dfrac{2}{3}$，且对任意的正整数 m，n 都有 $a_{m+n}=a_m+a_n$，则$\dfrac{a_n}{n}$等于(　　)

A.$\dfrac{1}{2}$　　B.$\dfrac{2}{3}$　　C.$\dfrac{3}{2}$　　D．2

11、设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=-11$，$a_4+a_6=-6$，则 $S_n=$________

12、已知等差数列$\{a_n\}$的公差大于 0，且 $a_2a_7=39$，$a_3+a_6=16$，则

13、各项都为正数的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_{10}=2$，$S_{30}=14$，则 $S_{40}=$

14、数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n^2$，则 $a_n=$_____　　___

15、在如下数表中，已知每行、每列中的树都成等差数列，那么，位于下表中的第 n 行第 n+1 列的数是__________。

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	…
第 1 行	1	2	3	…
第 2 行	2	4	6	…
第 3 行	3	6	9	…
…	…	…	…	…

16．已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=31$，

S_n是它的前 n 项和，$S_{10}=S_{22}$.

(1)求 S_n；　(2)这个数列的前多少项的和最大，并求出这个最大值.

17、已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_4=81$，若数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\log_3 a_n$，

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式(2)求数列$\left\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前 n 项和 S_n

18、已知递增的等比数列$\{a_n\}$满足：$a_2+a_3+a_4=28$，且a_3+2是a_2，a_4的等差中项.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；(2)设$b_n=a_n{}^2$，求数列$\{b_n\}$的前n项和

19、已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n， 点$P(a_n,S_n)$在直线 $y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$上.

⑴求数列$\{a_n\}$的通项公式

⑵设$b_n=\log_4 a_{n+1}$，$c_n=a_n+b_n$，求数列$\{c_n\}$的前n项T_n

20、已知数列$\{a_n\}$为公差不为零的等差数列，$a_1=1$，各项均为正数的等比数列$\{b_n\}$的第 1 项，第 3 项，第 5 项分别是 a_1，a_3，a_{21}.

(1)求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；　(2)求数列$\{a_nb_n\}$的前 n 项和 S_n.

21、在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_4+a_5=84$，$a_9=73$.(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，将数列$\{a_n\}$中落入区间$(9^m,9^{2m})$内的项的个数记为 b_m，求数列$\{b_m\}$的前 m 项和 S_m.

数列练习二(廖老师出题)

1、在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，$a_4=5$，则$\{a_n\}$的前5项和$S_5=$(B)

A．7 B．15 C．20 D．25 解：$S_5=\frac{5(a_1+a_5)}{2}=\frac{5\times(1+5)}{2}=15$.

2、公比为2的等比数列$\{a_n\}$的各项都是正数，且$a_3a_{11}=16$，则$a_5=$(A)

A．1 B．2 C．4 D．8 解：$\because a_3\cdot a_{11}=16\therefore a_7^2=16$.又$\because a_n>0$，$\therefore a_7=4$，$a_5=a_7/q^2=4/4=1$.

3、等差数列$\{a_n\}$中，$S_{15}=90$, a_8等于 （C）

A．3 B．4 C．6 D．12 $S_{15}=\frac{15(a_1+a_{15})}{2}=\frac{15\times 2a_8}{2}=15a_8=90, a_8=6$

4、设等比数列$\{a_n\}$中，a_5，a_3，a_4成等差数列．则公比是(C)

A．1 B．-2 C．1或-2 D．-1或2

解：(1)设公比为q， $2a_3=a_5+a_4$，,$2a_1q^2=a_1q^4+a_1q^3$.

由$a_1\neq 0$，$q\neq 0$得$q^2+q-2=0$，解得$q_1=-2$或$q_2=1$

5、等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为S_n，T_n，若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$，则$\frac{a_n}{b_n}=$(B)

A.$\frac{2}{3}$ B.$\frac{2n-1}{3n-1}$ C.$\frac{2n+1}{3n+1}$ D.$\frac{2n-1}{3n+4}$

解1：$\frac{a_n}{b_n}=\frac{2a_n}{2b_n}=\frac{a_1+a_{2n-1}}{b_1+b_{2n-1}}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\frac{2(2n-1)}{3(2n-1)+1}=\frac{2n-1}{3n-1}$.解2：令$n=1$，只有B项符合.

6．已知$\{a_n\}$是首项为1的等比数列，S_n是$\{a_n\}$的前n项和，且$9S_3=S_6$，则数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$的前5项和为( ) A.$\frac{15}{8}$或5 B.$\frac{31}{16}$或5 C.$\frac{31}{16}$ D.$\frac{15}{8}$

解：选C 设数列$\{a_n\}$的公比为q.由题意可知$q\neq 1$，且$\frac{9(1-q^3)}{1-q}=\frac{1-q^6}{1-q}$，解得$q=2$，所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以1为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，由求和公式可得$S_5=\frac{31}{16}$.

7、已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_4+a_7=2$，$a_5a_6=-8$，则$a_1+a_{10}=$(D)

A．7 B．5 C．-5 D．-7

由$\begin{cases}a_4+a_7=2,\\ a_5a_6=a_4a_7=-8,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}a_4=-2,\\ a_7=4\end{cases}$ 或$\begin{cases}a_4=4,\\ a_7=-2.\end{cases}$ 则$\begin{cases}q^3=-2,\\ a_1=1\end{cases}$ 或$\begin{cases}q^3=-\frac{1}{2},\\ a_1=-8,\end{cases}$ 故$a_1+a_{10}=a_1(1+q^9)=-7$.

8、设数列$\{a_n\}$是公差不为0的等差数列，$a_1=1$且a_1，a_3，a_6成等比数列，则$\{a_n\}$的前n项和S_n等于( ) A.$\frac{n^2}{8}+\frac{7n}{8}$ B.$\frac{n^2}{4}+\frac{7n}{4}$ C.$\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{4}$ D．n^2+n

解：选A 由a_1，a_3，a_6成等比数列可得$a_3^2=a_1\cdot a_6$，设数列$\{a_n\}$的公差为$d(d\neq 0)$，则$(1+2d)^2=1\times(1+5d)$，而$d\neq 0$，故$d=\frac{1}{4}$，所以$S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{n^2}{8}+\frac{7n}{8}$.

9．数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$\{b_n\}$是等差数列，且$a_6=b_7$，则有(B)

A．$a_3+a_9\leqslant b_4+b_{10}$ B．$a_3+a_9\geqslant b_4+b_{10}$ C．$a_3+a_9\neq b_4+b_{10}$ D．a_3+a_9与b_4+b_{10}的大小不确定

解：选B $a_3+a_9\geqslant 2\sqrt{a_3a_9}=2\sqrt{a_6^2}=2a_6=2b_7=b_4+b_{10}$，当且仅当$a_3=a_9$时，不等式取等号.

10．已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{2}{3}$，且对任意的正整数m，n都有$a_{m+n}=a_m+a_n$，则$\frac{a_n}{n}$等于(B)

A.$\frac{1}{2}$ B.$\frac{2}{3}$ C.$\frac{3}{2}$ D．2 解1：令$m=1$，得$a_{n+1}=a_1+a_n$，即$a_{n+1}-a_n=a_1=\frac{2}{3}$， $\{a_n\}$是等差数列首项$a_1=\frac{2}{3}$，公差$d=\frac{2}{3}$，于是$a_n=\frac{2}{3}+(n-1)\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}n$，即$\frac{a_n}{n}=\frac{2}{3}$. 解2：$a_1=\frac{2}{3}$得B

11、设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项 0063
0 .

和为S_n，若$a_1=-11$，$a_4+a_6=-6$，则$S_n=$________

解：$a_4+a_6=2a_1+7d=-22+7d=-6, 7d=14, d=2,$
$S_n=-11n+n(n-1)=n^2-12n$ ，

12、已知等差数列$\{a_n\}$的公差大于 0， $a_3a_6=56, a_3+a_7=16$，

则$a_n=(2\sqrt{2}-2)n+18-10\sqrt{2}$

改后 12、已知等差数列$\{a_n\}$的公差大于 0，且$a_2a_7=39, a_3+a_6=16$,则$a_n=2n-1$

解：$a_2a_7=39, a_2+a_7=a_3+a_6=16, a_2=3, a_7=13, 5d=10,$
$d=2, a_n=1+2(n-1)=2n-1$

13、各项都为正数的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 S_{10}＝2, S_{30}＝14，则 S_{40}＝ 16

解：$S_{10}=2, S_{20}-S_{10}=t-2, S_{30}-S_{20}=14-t, (t-2)^2=2(14-t), t=6$ –

$S_{10}=2, S_{20}-S_{10}=t-2, S_{30}-S_{20}=14-t, (t-2)^2=2(14-t), t=6$
$S_{10}=2, S_{20}-S_{10}=4, S_{30}-S_{20}=8 \Rightarrow S_{40}-S_{30}=16, S_{40}=16+S_{30}=16+14=30$

14、数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 S_n＝n^2，则 a_n＝ = $\underline{2n-1(n\in \mathbf{N}^*)}$

解：(1)当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1.$
亦满足上式，故 $a_n=2n-1(n\in \mathbf{N}^*)$.

15、在如下数表中，已知每行、每列中的树都成等差数列，那么，位于下表中的第 n 行第 n+1 列的数是__________。

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	…
第 1 行	1	2	3	…
第 2 行	2	4	6	…
第 3 行	3	6	9	…

解：第 n 行第 1 个为 n，公差 n
的第 n+1 个为 n+（n+1−1）n=n^2+n

16．已知在等差数列$\{a_n\}$中，a_1＝31，
S_n是它的前 n 项和，S_{10}＝S_{22}.(1)求 S_n；(2)这个数列的前多少项的和最大，并求出这个最大值.

(1) 由 S_{10}＝S_{22}得，$10a_1+45d=22a_1+231d, 10a_1+45d=22a_1+231d, 186d=-12a_1$
$31d=-2\times 31, d=-2$

$\therefore S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=31n-n(n-1)=32n-n^2.$

解 2∵ $S_{10}=S_{22}$，$\therefore a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{22}=0$，即$\dfrac{12(a_{11}+a_{22})}{2}=0$，故 $a_{11}+a_{22}=0$，$2a_1+31d=0.$

又∵$a_1=31$，$\therefore d=-2$，$\therefore S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=31n-n(n-1)=32n-n^2.$

(2) $S_n=32n-n^2$，对称轴 n=16
故当 $n=16$ 时，S_n有最大值，S_n的最大值是 256.

17、已知等比数列$\{a_n\}$中，a_1＝3，a_4＝81，若数列$\{b_n\}$满足 b_n＝$\log_3 a_n$，

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式(2)求数列$\left\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前 n 项和 S_n

解：(1)设$\{a_n\}$公比为 q，则$\dfrac{a_4}{a_1}=q^3=27$，$q=3$. $a_n=a_1q^{n-1}=3\times 3^{n-1}=3^n$，$b_n=\log_3 a_n=n$，

(2) $\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{1}{n(n+1)}$, $S_n=\dfrac{1}{1\times 2}+\dfrac{1}{2\times 3}+\dfrac{1}{3\times 4}+\cdots+\dfrac{1}{n\times(n+1)}=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$

18、已知递增的等比数列$\{a_n\}$满足：a_2＋a_3＋a_4＝28，且 a_3＋2 是 a_2，a_4的等差中项.
(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；(2)设$b_n=a_n{}^2$，求数列$\{b_n\}$的前 n 项和
解：设等比数列$\{a_n\}$公比为 q.依题意 $2(a_3+2)=a_2+a_4=28-a_3$，$a_3=8$，$\therefore a_2+a_4=20.$

$\therefore\begin{cases}a_1q+a_1q^3=20，\\a_3=a_1q^2=8，\end{cases}$ 解得$\begin{cases}q=2，\\a_1=2，\end{cases}$ 或$\begin{cases}q=\frac{1}{2}，\\a_1=32.\end{cases}$ $\{a_n\}$为递增数列$\therefore\begin{cases}q=2，\\a_1=2.\end{cases}$ $\therefore a_n=2^n$.

19、已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n， 点$P(a_n,S_n)$在直线 $y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$上.

⑴求数列$\{a_n\}$的通项公式 ⑵设$b_n=\log_4 a_{n+1}$，$c_n=a_n+b_n$，求数列$\{c_n\}$的前 n 项T_n

解：⑴当 n=1 时，$a_1=\frac{4}{3}a_1-\frac{1}{3},a_1=1$

$S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3},S_{n-1}=\frac{4}{3}a_{n-1}-\frac{1}{3}(n\ge 2)$， $a_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{4}{3}a_{n-1},a_n=4a_{n-1}(n\ge 2)$

$\{a_n\}$是等比数列公比 4 首项 1，$a_n=4^{n-1}$

⑵$b_n=\log_4 a_{n+1}=\log_4 4^n=n$，$c_n=a_n+b_n=4^{n-1}+n$，

$T_n=(1+2+\cdots+n)+(1+4+\cdots+4^{n-1})=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{4^n-1}{3}$

20、已知数列$\{a_n\}$为公差不为零的等差数列，a_1＝1，各项均为正数的等比数列$\{b_n\}$的第 1 项，第 3 项，第 5 项分别是 a_1，a_3，a_{21}.

(1)求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；(2)求数列$\{a_nb_n\}$的前 n 项和 S_n.

解：(1) $\{a_n\}$的公差为 $d(d\neq 0)$，数列$\{b_n\}$的公比为 q，

∵由题意得 $a_3^2=a_1a_{21}$，$\therefore (1+2d)^2=1\times(1+20d)$，即 $4d^2-16d=0$，

$\because d\neq 0$，$\therefore d=4$，$\therefore a_n=4n-3$.

$\therefore b_1=1$，$b_3=9$，$b_5=81$，

$\because\{b_n\}$的各项均为正数，$\therefore q=3$，$\therefore b_n=3^{n-1}$.

(2)∵由(1)可得 $a_nb_n=(4n-3)3^{n-1}$，

$\therefore S_n=3^0+5\times3^1+9\times3^2+\cdots+(4n-7)\times3^{n-2}+(4n-3)\times3^{n-1}$，

$3S_n=3^1+5\times3^2+9\times3^3+\cdots+(4n-7)\times3^{n-1}+(4n-3)\times3^n$，

相减得:

$-2S_n=1+4(3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1})-(4n-3)\times3^n$

$=1+\frac{4\times3\times(3^{n-1}-1)}{2}-(4n-3)\times3^n=(5-4n)\times3^n-5$，$\therefore S_n=\frac{(4n-5)3^n+5}{2}$.

21、在等差数列$\{a_n\}$中，$a_3+a_4+a_5=84$，$a_9=73$.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2)对任意 $m\in\mathbf{N}^*$，将数列$\{a_n\}$中落入区间$(9^m,9^{2m})$内的项的个数记为 b_m，求数列$\{b_m\}$的前 m 项和 S_m.

解：(1)因为$\{a_n\}$是一个等差数列，

所以 $a_3+a_4+a_5=3a_4=84$，所以 $a_4=28$.

设数列$\{a_n\}$的公差为 d，

则 $5d=a_9-a_4=73-28=45$，故 $d=9$.

由 $a_4=a_1+3d$ 得 $28=a_1+3\times9$，即 $a_1=1$，所以 $a_n=a_1+(n-1)d=1+9(n-1)=9n-8(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2)对 $m\in\mathbf{N}^*$，若 $9^m<a_n<9^{2m}$，

则 $9^m+8<9n<9^{2m}+8$，

因此 $9^{m-1}+1\leqslant n\leqslant 9^{2m-1}$，

故得 $b_m=9^{2m-1}-9^{m-1}$.

于是 $S_m=b_1+b_2+b_3+\cdots+b_m$

$=(9+9^3+\cdots+9^{2m-1})-(1+9+\cdots+9^{m-1})$

$=\dfrac{9\times(1-81^m)}{1-81}-\dfrac{(1-9^m)}{1-9}$

$=\dfrac{9^{2m+1}-10\times 9^m+1}{80}$.

数列练习二(廖老师出题)打印

1、在等差数列$\{a_n\}$中，$a_2=1$，$a_4=5$，则$\{a_n\}$的前 5 项和 S_5＝(　B　)

A．7　　B．15　C．20　　D．25

2、公比为 2 的等比数列$\{a_n\}$的各项都是正数，且 $a_3a_{11}=16$，则 a_5＝(A　)

A．1　B．2 C．4 D．8

3、等差数列$\{a_n\}$中，$S_{15}=90$, a_8 等于（C）A．3　B．4　C．6　D．12

4、设等比数列$\{a_n\}$中，a_5，a_3，a_4 成等差数列．则公比是(　C　)

A．1　B．-2　C．1 或-2　D．-1 或 2

解：(1)设公比为 q，　$2a_3=a_5+a_4$，,$2a_1q^2=a_1q^4+a_1q^3$.

由 $a_1\neq 0$，$q\neq 0$ 得 $q^2+q-2=0$，解得 $q_1=-2$ 或 $q_2=1$

5、等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n，T_n，若$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n}{3n+1}$，则$\dfrac{a_n}{b_n}$＝(　B　)

A.$\dfrac{2}{3}$　B.$\dfrac{2n-1}{3n-1}$ C.$\dfrac{2n+1}{3n+1}$　D.$\dfrac{2n-1}{3n+4}$

解 1：$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{2a_n}{2b_n}=\dfrac{a_1+a_{2n-1}}{b_1+b_{2n-1}}=\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{2(2n-1)}{3(2n-1)+1}=\dfrac{2n-1}{3n-1}$.解 2：令 $n=1$，只有 B 项符合.

6．已知$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列，S_n 是$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $9S_3=S_6$，则数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前 5

项和为(　　)　A.$\frac{15}{8}$或 5　B.$\frac{31}{16}$或 5　C.$\frac{31}{16}$　D.$\frac{15}{8}$

解：选 C　设数列$\{a_n\}$的公比为 q.由题意可知 $q\neq1$，且$\frac{9(1-q^3)}{1-q}=\frac{1-q^6}{1-q}$，解得 $q=2$，所以数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是以 1 为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，由求和公式可得 $S_5=\frac{31}{16}$.

7、已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_4+a_7=2$，$a_5a_6=-8$，则 $a_1+a_{10}=$(　D　)

A．7　　B．5　C．－5　D．－7

由$\begin{cases}a_4+a_7=2,\\ a_5a_6=a_4a_7=-8,\end{cases}$　得$\begin{cases}a_4=-2,\\ a_7=4\end{cases}$　或$\begin{cases}a_4=4,\\ a_7=-2.\end{cases}$　故 $a_1+a_{10}=a_1(1+q^9)=-7$.

8、设数列$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列，$a_1=1$ 且 a_1，a_3，a_6 成等比数列，则$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 等于(　A)　A.$\frac{n^2}{8}+\frac{7n}{8}$　　B.$\frac{n^2}{4}+\frac{7n}{4}$　C.$\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{4}$　D．n^2+n

9．数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$\{b_n\}$是等差数列，且 $a_6=b_7$，则有(　B)

A．$a_3+a_9\leqslant b_4+b_{10}$B．$a_3+a_9\geqslant b_4+b_{10}$C．$a_3+a_9\neq b_4+b_{10}$D．$a_3+a_9$与 b_4+b_{10} 的大小不确定

解：选 B　$a_3+a_9\geqslant2\sqrt{a_3a_9}=2\sqrt{a_6^2}=2a_6=2b_7=b_4+b_{10}$，当且仅当 $a_3=a_9$ 时，不等式取等号.

10．已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\frac{2}{3}$，且对任意的正整数 m，n 都有 $a_{m+n}=a_m+a_n$，则$\frac{a_n}{n}$等于(B　)

A.$\frac{1}{2}$　B.$\frac{2}{3}$　C.$\frac{3}{2}$　D．2　**解** 1：令 $m=1$，得 $a_{n+1}=a_1+a_n$，即 $a_{n+1}-a_n=a_1=\frac{2}{3}$，　$\{a_n\}$是等差数列首项 $a_1=\frac{2}{3}$，公差 $d=\frac{2}{3}$，于是 $a_n=\frac{2}{3}+(n-1)\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}n$，即$\frac{a_n}{n}=\frac{2}{3}$. 解 2：$a_1=\frac{2}{3}$得 B

11、设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=-11$，$a_4+a_6=-6$，则 $S_n=n^2-12n$ ______

12、已知等差数列$\{a_n\}$的公差大于 0，　$a_3a_6=56, a_3+a_7=16$,则 $a_n=(2\sqrt{2}-2)n+18-10\sqrt{2}$

改后 12、已知等差数列$\{a_n\}$的公差大于 0，且 $a_2a_7=39, a_3+a_6=16$,则 $a_n=2n-1$

解：$a_2a_7=39, a_2+a_7=a_3+a_6=16, a_2=3, a_7=13, 5d=10,$
$d=2, a_n=1+2(n-1)=2n-1$

13、各项都为正数的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,若 $S_{10}=2, S_{30}=14$，则 $S_{40}=$　16

解：　$S_{20}=t=6, S_{10}=2, S_{20}-S_{10}=4, S_{30}-S_{20}=8\Rightarrow S_{40}-S_{30}=16, S_{40}=16+S_{30}=16+14=30$

14、数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n^2$，则 $a_n=$ $=\underline{2n-1(n\in\mathbf{N}^*)}$

15、在如下数表中，已知每行、每列中的树都成等差数列，那么，位于下表中的第 n 行第 n+1 列的数是__________。

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	…
第 1 行	1	2	3	…
第 2 行	2	4	6	…
第 3 行	3	6	9	…

解：第 n 行第 1 个为 n，公差 n 的第 n+1 个为 n+（n+1−1）n=n^2+n

16．已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=31$，S_n 是它的前 n 项和，$S_{10}=S_{22}$.(1)求 S_n；(2)这个数列的前多少项的和最大，并求出这个最大值.

(1) 由 $S_{10}=S_{22}$ 得，$10a_1+45d=22a_1+231d, 10a_1+45d=22a_1+231d, 186d=-12a_1$
$31d=-2\times31, d=-2$

$\therefore S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=31n-n(n-1)=32n-n^2.$

(2) $S_n=32n-n^2$，对称轴 n=16　故当 $n=16$ 时，S_n 有最大值，S_n 的最大值是 256.

17、已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_4=81$，若数列$\{b_n\}$满足 $b_n=\log_3a_n$，

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式(2)求数列$\left\{\frac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前 n 项和 S_n

解：(1)设$\{a_n\}$公比为 q，则$\frac{a_4}{a_1}=q^3=27$，　$q=3$. $a_n=a_1q^{n-1}=3\times3^{n-1}=3^n$，　$b_n=\log_3a_n=n$，

(2) $\frac{1}{b_nb_{n+1}}=\frac{1}{n(n+1)}$, $S_n=\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\frac{1}{3\times4}+\cdots+\frac{1}{n\times(n+1)}=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

18、已知递增的等比数列$\{a_n\}$满足：$a_2+a_3+a_4=28$，且a_3+2是a_2，a_4的等差中项．

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；(2)设$b_n=a_n^{\ 2}$，求数列$\{b_n\}$的前n项和

解：设等比数列$\{a_n\}$公比为q.依题意$2(a_3+2)=a_2+a_4=28-a_3$，$a_3=8$，$\therefore a_2+a_4=20$.

$\therefore\begin{cases}a_1q+a_1q^3=20,\\a_3=a_1q^2=8,\end{cases}$ 解得$\begin{cases}q=2,\\a_1=2,\end{cases}$ 或$\begin{cases}q=\frac{1}{2},\\a_1=32.\end{cases}$ $\{a_n\}$为递增数列$\therefore\begin{cases}q=2,\\a_1=2.\end{cases}$ $\therefore a_n=2^n$.

19、已知数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，　点$P(a_n,S_n)$在直线　$y=\frac{4}{3}x-\frac{1}{3}$上.

⑴求数列$\{a_n\}$的通项公式 ⑵设$b_n=\log_4 a_{n+1}$，$c_n=a_n+b_n$，求数列$\{c_n\}$的前n项T_n

解：⑴当n=1时，$a_1=\frac{4}{3}a_1-\frac{1}{3},a_1=1$, $S_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{1}{3}$, $S_{n-1}=\frac{4}{3}a_{n-1}-\frac{1}{3}(n\geq2)$，

$a_n=\frac{4}{3}a_n-\frac{4}{3}a_{n-1},a_n=4a_{n-1}(n\geq2)$　$\{a_n\}$是等比数列公比4首项1, $a_n=4^{n-1}$

⑵$b_n=\log_4 a_{n+1}=\log_4 4^n=n$，$c_n=a_n+b_n=4^{n-1}+n$，

$T_n=(1+2+\cdots+n)+(1+4+\cdots+4^{n-1})=\frac{n(n+1)}{2}+\frac{4^n-1}{3}$

20、已知数列$\{a_n\}$为公差不为零的等差数列，$a_1=1$，各项均为正数的等比数列$\{b_n\}$的第1项，第3项，第5项分别是a_1，a_3，a_{21}.

(1)求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；(2)求数列$\{a_nb_n\}$的前n项和S_n.

解: (1) $\{a_n\}$的公差为$d(d\neq0)$，数列$\{b_n\}$的公比为q，$\because$由题意得$a_3^2=a_1a_{21}$，$\therefore(1+2d)^2=1\times(1+20d)$，即 $4d^2-16d=0$，$\because d\neq0$，$\therefore d=4$，$\therefore a_n=4n-3$.$\therefore b_1=1$，$b_3=9$，$b_5=81$，$\because\{b_n\}$的各项正，$\therefore q=3$，$\therefore b_n=3^{n-1}$.

(2)$\because$由(1)可得$a_nb_n=(4n-3)3^{n-1}$，

$\therefore S_n=3^0+5\times3^1+9\times3^2+\cdots+(4n-7)\times3^{n-2}+(4n-3)\times3^{n-1}$，

$3S_n=3^1+5\times3^2+9\times3^3+\cdots+(4n-7)\times3^{n-1}+(4n-3)\times3^n$，相减得:

$-2S_n=1+4(3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1})-(4n-3)\times3^n$

$=1+\frac{4\times3\times(3^{n-1}-1)}{2}-(4n-3)\times3^n=(5-4n)\times3^n-5$，$\therefore S_n=\frac{(4n-5)3^n+5}{2}$.

21、设$\{a_n\}$是公比不为1的等比数列，其前n项和为S_n，且a_5，a_3，a_4成等差数列.

(1)求数列$\{a_n\}$的公比；

(2)证明：对任意$k\in\mathbf{N}_+$，S_{k+2}，S_k，S_{k+1}成等差数列.

解：(1)设数列$\{a_n\}$的公比为$q(q\neq0，q\neq1)$，

由a_5，a_3，a_4成等差数列，得$2a_3=a_5+a_4$，

即$2a_1q^2=a_1q^4+a_1q^3$.

由$a_1\neq0$，$q\neq0$得$q^2+q-2=0$，解得$q_1=-2$或$q_2=1$(舍去)，故$q=-2$.

(2)证明：**法一**：对任意$k\in\mathbf{N}_+$，

$S_{k+2}+S_{k+1}-2S_k=(S_{k+2}-S_k)+(S_{k+1}-S_k)$

$=a_{k+1}+a_{k+2}+a_{k+1}$

$=2a_{k+1}+a_{k+1}\cdot(-2)$

$=0$，

所以对任意 $k\in\mathbf{N}_+$，S_{k+2}，S_k，S_{k+1} 成等差数列.

法二：对任意 $k\in\mathbf{N}_+$，$2S_k=\dfrac{2a_1(1-q^k)}{1-q}$，

$$S_{k+2}+S_{k+1}=\frac{a_1(1-q^{k+2})}{1-q}+\frac{a_1(1-q^{k+1})}{1-q}=\frac{a_1(2-q^{k+2}-q^{k+1})}{1-q},$$

$$2S_k-(S_{k+2}+S_{k+1})=\frac{2a_1(1-q^k)}{1-q}-\frac{a_1(2-q^{k+2}-q^{k+1})}{1-q}$$

$$=\frac{a_1}{1-q}[2(1-q^k)-(2-q^{k+2}-q^{k+1})]$$

$$=\frac{a_1q^k}{1-q}(q^2+q-2)=0,$$

因此，对任意 $k\in\mathbf{N}_+$，S_{k+2}，S_k，S_{k+1} 成等差数列.

数列练习二(廖老师出题)

1、在等差数列$\{a_n\}$中，a_2＝1，a_4＝5，则$\{a_n\}$的前 5 项和 S_5＝(　　)

A．7　　　　B．15

C．20　　　　D．25

解析：选 B　∵$\{a_n\}$是等差数列，∴$a_2+a_4=2a_3=1+5$，

故 $a_3=3$，∴$S_5=\dfrac{5(a_1+a_5)}{2}=\dfrac{5\times 2a_3}{2}=5a_3=5\times 3=15$.

2、公比为 2 的等比数列$\{a_n\}$的各项都是正数，且 $a_3a_{11}=16$，则 $a_5=($　　)

A．1　　　　B．2

C．4　　　　D．8

解析：选 A　∵$a_3\cdot a_{11}=16$，∴$a_7^2=16$.

又∵$a_n>0$，∴$a_7=4$.$a_5=a_7\cdot q^{-2}=4\times 2^{-2}=1$.

3、等差数列$\{a_n\}$中，$S_{15}=90$, a_8等于　　　　（C）

A．3　　B．4　　C．6　　D．12

4、设数列$\{a_n\}$满足：$2a_n=a_{n+1}(a_n\neq 0)(n\in \mathbf{N}^*)$，且前 n 项和为 S_n，则$\dfrac{S_4}{a_2}$的值为(　　)

A.$\dfrac{15}{2}$　　　　B.$\dfrac{15}{4}$

C．4　　　　D．2

解析：选 A　由题意知，数列$\{a_n\}$是以 2 为公比的等比数列，故$\dfrac{S_4}{a_2}=\dfrac{\dfrac{a_1(1-2^4)}{1-2}}{a_1\times 2}=\dfrac{15}{2}$.

5、等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n，T_n，若$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n}{3n+1}$，则$\dfrac{a_n}{b_n}=($　　)

A.$\dfrac{2}{3}$　　　　B.$\dfrac{2n-1}{3n-1}$

C.$\dfrac{2n+1}{3n+1}$　　　　D.$\dfrac{2n-1}{3n+4}$

解析：选 B　**法一**：$\dfrac{a_n}{b_n}=\dfrac{2a_n}{2b_n}=\dfrac{a_1+a_{2n-1}}{b_1+b_{2n-1}}=\dfrac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=\dfrac{2(2n-1)}{3(2n-1)+1}=\dfrac{2n-1}{3n-1}$.

法二：令 $n=1$，只有 B 项符合.

6．已知$\{a_n\}$是首项为 1 的等比数列，S_n是$\{a_n\}$的前 n 项和，且 $9S_3=S_6$，则数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$的前 5 项和为(　　)

A.$\dfrac{15}{8}$或 5　　　　B.$\dfrac{31}{16}$或 5

C.$\dfrac{31}{16}$　　　　D.$\dfrac{15}{8}$

解析：选 C　设数列$\{a_n\}$的公比为 q.由题意可知 $q\neq 1$，且$\dfrac{9(1-q^3)}{1-q}=\dfrac{1-q^6}{1-q}$，解得 $q=2$，所以数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$是以 1 为首项，$\dfrac{1}{2}$为公比的等比数列，由求和公式可得 $S_5=\dfrac{31}{16}$.

7、已知$\{a_n\}$为等比数列，$a_4+a_7=2$，$a_5a_6=-8$，则 $a_1+a_{10}=($　　)

A．7　　　　B．5

C．-5　　　　D．-7

由$\begin{cases} a_4+a_7=2, \\ a_5a_6=a_4a_7=-8, \end{cases}$ 解得$\begin{cases} a_4=-2, \\ a_7=4 \end{cases}$ 或$\begin{cases} a_4=4, \\ a_7=-2. \end{cases}$

则$\begin{cases} q^3=-2, \\ a_1=1 \end{cases}$ 或$\begin{cases} q^3=-\frac{1}{2}, \\ a_1=-8, \end{cases}$ 故 $a_1+a_{10}=a_1(1+q^9)=-7$.

8、设数列$\{a_n\}$是公差不为 0 的等差数列，$a_1=1$ 且 a_1，a_3，a_6 成等比数列，则$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 等于(　　)

A.$\frac{n^2}{8}+\frac{7n}{8}$　　B.$\frac{n^2}{4}+\frac{7n}{4}$

C.$\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{4}$　　D．n^2+n

解析：选 A　由 a_1，a_3，a_6 成等比数列可得 $a_3^2=a_1\cdot a_6$，设数列$\{a_n\}$的公差为 $d(d\neq0)$，则$(1+2d)^2=1\times(1+5d)$，而 $d\neq0$，故 $d=\frac{1}{4}$，所以 $S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}\times\frac{1}{4}=\frac{n^2}{8}+\frac{7n}{8}$.

9．数列$\{a_n\}$是各项均为正数的等比数列，$\{b_n\}$是等差数列，且 $a_6=b_7$，则有(　　)

A．$a_3+a_9\leqslant b_4+b_{10}$　　B．$a_3+a_9\geqslant b_4+b_{10}$

C．$a_3+a_9\neq b_4+b_{10}$　　D．a_3+a_9 与 b_4+b_{10} 的大小不确定

解析：选 B　$a_3+a_9\geqslant2\sqrt{a_3a_9}=2\sqrt{a_6^2}=2a_6=2b_7=b_4+b_{10}$，当且仅当 $a_3=a_9$ 时，不等式取等号．

10．已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=\frac{2}{3}$，且对任意的正整数 m，n 都有 $a_{m+n}=a_m+a_n$，则$\frac{a_n}{n}$等于(　　)

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{2}{3}$

C.$\frac{3}{2}$　　D．2

解析：选 B　令 $m=1$，得 $a_{n+1}=a_1+a_n$，即 $a_{n+1}-a_n=a_1=\frac{2}{3}$，可知数列$\{a_n\}$是首项为 $a_1=\frac{2}{3}$，公差为 $d=\frac{2}{3}$的等差数列，于是 $a_n=\frac{2}{3}+(n-1)\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}n$，即$\frac{a_n}{n}=\frac{2}{3}$.

11、设等差数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $a_1=-11$，$a_4+a_6=-6$，则 $S_n=$________

12、已知等差数列$\{a_n\}$的公差大于 0，且 $a_3a_6=56, a_3+a_7=16$，则 $a_n=$______

13、各项都为正数的等比数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，若 $S_{10}=2$, $S_{30}=14$，则 $S_{40}=$ 16

14、数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n^2$，则 $a_n=$______

解：(1)∵数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n，且 $S_n=n^2$，

∴当 $n\geqslant2$ 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$.

当 $n=1$ 时，$a_1=S_1=1$ 亦满足上式，故 $a_n=2n-1(n\in\mathbf{N}^*)$.

14、在如下数表中，已知每行、每列中的树都成等差数列，那么，位于下表中的第 n 行第 n+1 列的数是__________。

	第 1 列	第 2 列	第 3 列	…
第 1 行	1	2	3	…
第 2 行	2	4	6	…
第 3 行	3	6	9	…

15．已知在等差数列$\{a_n\}$中，$a_1=31$，S_n是它的前n项和，$S_{10}=S_{22}$.

(1)求S_n；

(2)这个数列的前多少项的和最大，并求出这个最大值.

解：(1)$\because S_{10}=a_1+a_2+\cdots+a_{10}$，

$S_{22}=a_1+a_2+\cdots+a_{22}$，又$S_{10}=S_{22}$，

$\therefore a_{11}+a_{12}+\cdots+a_{22}=0$，

即$\dfrac{12(a_{11}+a_{22})}{2}=0$，故$a_{11}+a_{22}=2a_1+31d=0$.

又$\because a_1=31$，$\therefore d=-2$，

$\therefore S_n=na_1+\dfrac{n(n-1)}{2}d=31n-n(n-1)=32n-n^2$.

(2)法一：由(1)知$S_n=32n-n^2$，

故当$n=16$时，S_n有最大值，S_n的最大值是256.

法二：由$S_n=32n-n^2=n(32-n)$，欲使S_n有最大值，

应有$1<n<32$，从而$S_n\leqslant\left(\dfrac{n+32-n}{2}\right)^2=256$，

当且仅当$n=32-n$，即$n=16$时，S_n有最大值256.

16、已知等比数列$\{a_n\}$中，$a_1=3$，$a_4=81$，若数列$\{b_n\}$满足$b_n=\log_3 a_n$，

(1)求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式(2)求数列$\left\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前$n$项和$S_n$

解析：设等比数列$\{a_n\}$的公比为q，则$\dfrac{a_4}{a_1}=q^3=27$，解得$q=3$.所以$a_n=a_1q^{n-1}=3\times3^{n-1}$

$=3^n$，故$b_n=\log_3 a_n=n$，

所以$\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}=\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$.

则数列$\left\{\dfrac{1}{b_nb_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}=1-\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{n}{n+1}$.

答案：$\dfrac{n}{n+1}$

17、已知递增的等比数列$\{a_n\}$满足：$a_2+a_3+a_4=28$，且a_3+2是a_2，a_4的等差中项.

(1)求数列$\{a_n\}$的通项公式；(2)设$b_n=a_n{}^2$，求数列$\{b_n\}$的前n项和

解：设等比数列$\{a_n\}$的首项为a_1，公比为q.

依题意，有$2(a_3+2)=a_2+a_4$，

代入 $a_2 + a_3 + a_4 = 28$，得 $a_3 = 8$.

$\therefore a_2 + a_4 = 20$.

$\therefore \begin{cases} a_1q + a_1q^3 = 20, \\ a_3 = a_1q^2 = 8, \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} q = 2, \\ a_1 = 2, \end{cases}$ 或 $\begin{cases} q = \frac{1}{2}, \\ a_1 = 32. \end{cases}$

又 $\{a_n\}$ 为递增数列，

$\therefore \begin{cases} q = 2, \\ a_1 = 2. \end{cases}$ $\therefore a_n = 2^n$.

18、已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n， 点 $P(a_n, S_n)$ 在直线 $y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3}$ 上.

⑴求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

⑵设 $b_n = \log_4 a_{n+1}$， $c_n = a_n + b_n$，求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项 T_n

解：⑴ $S_n = \frac{4}{3}a_n - \frac{1}{3}, S_{n-1} = \frac{4}{3}a_{n-1} - \frac{1}{3}(n \geq 2)$，

$a_n = \frac{4}{3}a_n - \frac{4}{3}a_{n-1}, a_n = 4a_{n-1}(n \geq 2)$

由 $S_n = \frac{4}{3}a_n - \frac{1}{3}$ 得 $a_1 = \frac{4}{3}a_1 - \frac{1}{3}, a_1 = 1, a_n = 4^{n-1}$

⑵ $b_n = \log_4 a_{n+1} = \log_4 4^n = n$，

$c_n = a_n + b_n = 4^{n-1} + n$，

$T_n = (1 + 2 + \cdots + n) + (1 + 4 + \cdots + 4^{n-1}) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{4^n - 1}{3}$

19、设 $\{a_n\}$ 是公比不为 1 的等比数列，其前 n 项和为 S_n，且 a_5，a_3，a_4 成等差数列.

(1)求数列 $\{a_n\}$ 的公比；

(2)证明：对任意 $k \in \mathbf{N}_+$，S_{k+2}，S_k，S_{k+1} 成等差数列.

解：(1)设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $q(q \neq 0, q \neq 1)$，

由 a_5，a_3，a_4 成等差数列，得 $2a_3 = a_5 + a_4$，

即 $2a_1q^2 = a_1q^4 + a_1q^3$.

由 $a_1 \neq 0$，$q \neq 0$ 得 $q^2 + q - 2 = 0$，解得 $q_1 = -2$ 或 $q_2 = 1$(舍去)，故 $q = -2$.

(2)证明：**法一**：对任意 $k \in \mathbf{N}_+$，

$S_{k+2} + S_{k+1} - 2S_k = (S_{k+2} - S_k) + (S_{k+1} - S_k)$

$= a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+1}$

$= 2a_{k+1} + a_{k+1} \cdot (-2)$

$= 0$，

所以对任意 $k \in \mathbf{N}_+$，S_{k+2}，S_k，S_{k+1} 成等差数列.

法二：对任意 $k \in \mathbf{N}_+$，$2S_k = \frac{2a_1(1 - q^k)}{1 - q}$，

$$S_{k+2}+S_{k+1}=\frac{a_1(1-q^{k+2})}{1-q}+\frac{a_1(1-q^{k+1})}{1-q}=\frac{a_1(2-q^{k+2}-q^{k+1})}{1-q},$$

$$2S_k-(S_{k+2}+S_{k+1})=\frac{2a_1(1-q^k)}{1-q}-\frac{a_1(2-q^{k+2}-q^{k+1})}{1-q}$$

$$=\frac{a_1}{1-q}[2(1-q^k)-(2-q^{k+2}-q^{k+1})]$$

$$=\frac{a_1q^k}{1-q}(q^2+q-2)=0,$$

因此，对任意 $k\in\mathbf{N}_+$，S_{k+2}，S_k，S_{k+1} 成等差数列.

20、已知数列$\{a_n\}$为公差不为零的等差数列，$a_1=1$，各项均为正数的等比数列$\{b_n\}$的第 1 项，第 3 项，第 5 项分别是 a_1，a_3，a_{21}.

(1)求数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$的通项公式；

(2)求数列$\{a_nb_n\}$的前 n 项和 S_n.

解：(1)设数列$\{a_n\}$的公差为 $d(d\neq0)$，数列$\{b_n\}$的公比为 q，

$\because$ 由题意得 $a_3^2=a_1a_{21}$，

$\therefore(1+2d)^2=1\times(1+20d)$，即 $4d^2-16d=0$，

$\because d\neq0$，$\therefore d=4$，$\therefore a_n=4n-3$.

$\therefore b_1=1$，$b_3=9$，$b_5=81$，

$\because\{b_n\}$的各项均为正数，

$\therefore q=3$，

$\therefore b_n=3^{n-1}$.

(2)$\because$ 由(1)可得 $a_nb_n=(4n-3)3^{n-1}$，

$\therefore S_n=3^0+5\times3^1+9\times3^2+\cdots+(4n-7)\times3^{n-2}+(4n-3)\times3^{n-1}$，

$3S_n=3^1+5\times3^2+9\times3^3+\cdots+(4n-7)\times3^{n-1}+(4n-3)\times3^n$，

两式相减得:

$$-2S_n=1+4\times3+4\times3^2+4\times3^3+\cdots+4\times3^{n-1}-(4n-3)\times3^n$$

$$=1+4(3+3^2+3^3+\cdots+3^{n-1})-(4n-3)\times3^n$$

$$=1+\frac{4\times3\times(1-3^{n-1})}{1-3}-(4n-3)\times3^n$$

$$=(5-4n)\times3^n-5,$$

$$\therefore S_n=\frac{(4n-5)3^n+5}{2}.$$