三明市A片区高中联盟校2013－2014学年第一学期阶段性考试试卷

高二数学（理科）

（考试时间：120分钟　满分：150分）

第Ⅰ卷（选择题 共50分）

一．选择题：（本大题共10小题，每小题5分，共50分．在每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请把正确选项的代号填在答题卷相应的位置上）

1．下列四个有关算法的说法中，不正确的是（　　）

A．算法的某些步骤可以不明确或有歧义，以便使算法能解决更多问题；

B．正确的算法执行后一定得到确定的结果；

C．解决某类问题的算法不一定是唯一的；

D．正确的算法一定能在有限步之内结束．

2．如果命题“若p，则q”为真，则下列结论一定成立的是(　　)

A．$q \Rightarrow p$　　B．$\neg p \Rightarrow \neg q$　　C．$\neg q \Rightarrow \neg p$　　D．$\neg q \Rightarrow p$

3．已知向量$\vec{a}=(0,2,1)$，$\vec{b}=(0,-4,-2)$，则向量$\vec{a}$，$\vec{b}$的关系为（　　）．

A．$\vec{a} \perp \vec{b}$　　B．$\vec{a} \parallel \vec{b}$　　C．$\vec{a}$与$\vec{b}$不平行也不垂直　　D．无法判断

4．对于常数r、$s\in R$，“$rs<0$”是“方程$rx^2+sy^2=1$的曲线是双曲线”的（　　）

A．充分不必要条件　　B．必要不充分条件

C．充要条件　　D．既不充分又不必要条件

5．已知命题$p:\forall x\in R$，$x^2\geqslant 0$，则（　　）

A．$\neg p:\exists x_0\notin R$，$x_0^2\leqslant 0$　　B．$\neg p:\exists x_0\notin R$，$x_0^2<0$

C．$\neg p:\exists x_0\in R$，$x_0^2\leqslant 0$　　D．$\neg p:\exists x_0\in R$，$x_0^2<0$

6．已知函数$y=x^3-x^2-ax+b$在(0，1)处的切线方程为$y=2x+1$，则$a+b=$(　　)；

A．0　　B．1　　C．2　　D．-1

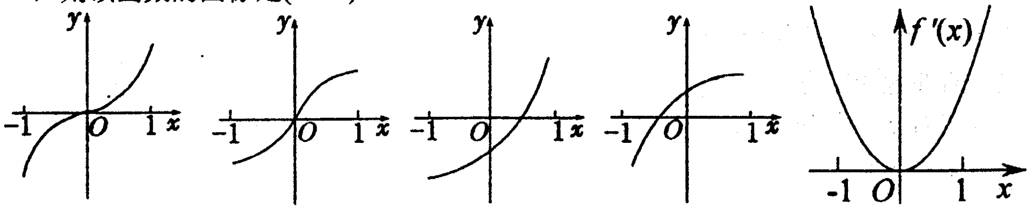
7．某厂节能降耗技术改造后，在生产甲产品过程中记录的产量x（吨）与相应的生产能耗y(吨)的几组对应数据如下表：

x	3	4	5	6
y	2.4	3.2	m	4.4

若根据上表提供的数据用最小二乘法可求得y对x的回归直线方程是$\hat{y}=0.68x+0.44$，则表中m的值为（　　）

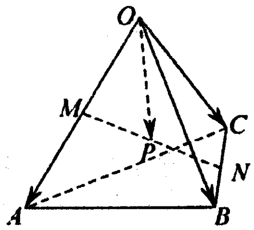
A．4.5　　B．4　　C．3.5　　D．3

8. 已知函数 $y=f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图像如右图所示，$y=f(x)$ 的图象为下列四个图像之一，则该函数的图像是(　　)



A　　　B　　　C　　　D　　　$y=f'(x)$ 的图象

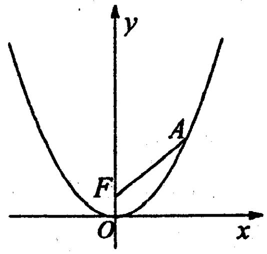
9. 如图，M、N 分别是四面体 $OABC$ 的边 OA、BC 的中点，P 是 MN 的中点，若 $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，则下列向量中与 $\overrightarrow{OP}$ 相等的向量是 (　　)



A. $-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$　　B. $\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}+\frac{1}{4}\vec{c}$

C. $\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{c}$　　D. $-\frac{1}{4}\vec{a}-\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{c}$

10. 如图，F 是抛物线 $E:x^2=2py(p>0)$ 的焦点，A 是抛物线 E 上任意一点。现给出下列四个结论，其中错误的结论是（　　）



A. 当点 A 为坐标原点时，$|AF|$ 为最短；

B. 以线段 AF 为直径的圆必与 x 轴相切；

C. 若点 B 是抛物线 E 上异于点 A 的一点，则当直线 AB 过焦点 F 时，$|AF|+|BF|$ 取得最小值；

D. 点 B、C 是抛物线 E 上异于点 A 的不同两点，若 $|AF|$、$|BF|$、$|CF|$ 成等差数列，则点 A、B、C 的纵坐标亦成等差数列。

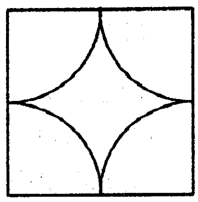
第II卷（非选择题　共100分）

二. 填空题：（本大题共5小题，每小题4分，共20分，请将答案填写在答题卷相应的位置上）

11. 计算：$\int_1^2 (e^x-\frac{1}{x})dx=$____________；

12. 与双曲线 $\frac{x^2}{2}-y^2=1$ 有相同的渐近线，且过点(2，2)的双曲线方程是__________；

13. 已知点 P 是边长为 2 的正方形内任一点，则 P 到四个顶点的距离均大于 1 的概率是______；



14. 给出下列四个命题：

①对于任意事件 A、B，都有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$；

②把 13 化为二进制数，该二进制数是 $1101_{(2)}$；

③在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若 $\overrightarrow{BD_1}=x\overrightarrow{AD}+y\overrightarrow{AB}+z\overrightarrow{AA_1}$，则 $x+y+z=1$；

④某校高二各班学生的座位号的编排是随机的，教务处要对高二年段学生的作业进行抽查，要求各班的学习委员把本班座号尾数为 7 的同学的作业收齐，并交到教务处。教务处的抽样方法是分层抽样；

其中真命题的序号是________（请填上所有正确命题的序号）；

15. 对于函数 $f(x)=\ln x+x$，当 $x\in[a,b]$ 时，$f(x)$ 的值域为 $[ka,kb](k>0)$，则实数k的取值范围是________。

三．解答题：（本大题共 6 小题，共 80 分．解答应写出必要的文字说明，证明过程或演算步骤）

16.（本小题满分 13 分）

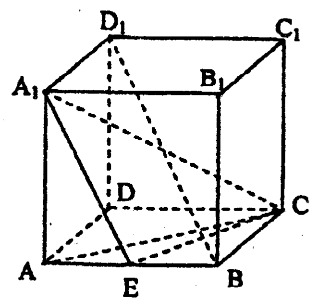
求函数 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-x^2-3x+6$ 在区间［－2，5］上的最大值和最小值．

17．（本小题满分 13 分）

如图，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E 为 AB 的中点．

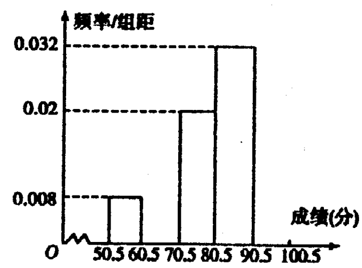
（1）求异面直线 BD_1 与 CE 所成角的余弦值；

（2）求二面角 A_1-EC-A 的余弦值．



18．（本小题满分 13 分）

某校共有 900 名学生参加网络安全知识竞赛，现从中抽取了部分同学的成绩（得分均为整数，满分 100 分）进行统计，其部分如下面的图表．



分组	50.5~60.5	60.5~70.5	70.5~80.5	80.5~90.5	90.5~100.5	合计
频数	4	8	10	16	12	50
频率	0.08	0.16	0.20	0.32	0.24	1

(1)补全频率分布直方图；

(2)若成绩在 75.5 分~85.5 分的学生为三等奖，试估计该校获得三等奖的学生约为多少人？

(3)统计方法中，同一组数据常用该组区间的中点值作为代表，据此估计本次网络安全知识竞赛成绩的中位数和平均数.

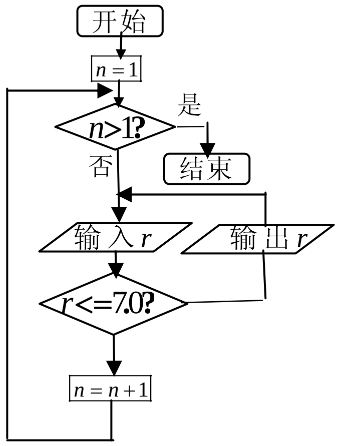
19．（本小题满分 13 分）

对某校高二年段男子体育兴趣小组的 50 米跑成绩（单位：s）进行统计分析，得到如下的茎叶图（其中，茎表示成绩的整数部分，叶表示成绩的小数部分）：

（1）成绩记录员在去掉一个最快成绩和一个最慢成绩后，算得平均成绩为 7.0s，但复核员在复核时，发现有一个数字（即茎叶图叶中的 x）无法看清．若计算无误，试求数字 x 的值；

（2）按右图的程序框图运行程序，当输入茎叶图中的成绩 r 时（输入顺序：先第一行，再第二行；从左往右.），试写出输出的结果；

（3）从（2）的输出结果中，随机抽取 2 个成绩，试求这两个成绩之和小于 13.5s 的概率.



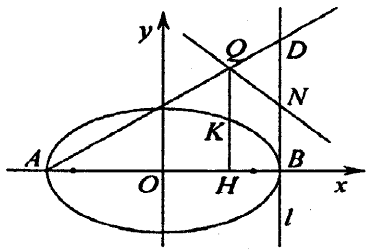
	成绩					
6	4	5	8	9		
7	0	x	2	4	5	1

20．（本小题满分 14 分）

已知椭圆C和双曲线：$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$有相同的焦点，且椭圆C的离心率为$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆C的方程；

（2）设椭圆C与x轴的两个左右交点分别为A、B，点K是椭圆C上异于A、B的任意一点，$KH\perp x$轴，H为垂足，延长HK到点Q使得$HK=KQ$，连结AQ并延长交过B且垂直于x轴的直线l于点D，N为DB的中点．试判断直线QN与以AB为直径的圆O的位置关系，并证明你的结论．



21．（本小题满分 14 分）

（Ⅰ）已知函数 $f(x)=e^x-kx$，$x\in R$

①若 $k=e$，试确定函数 $f(x)$ 的单调区间；

②若 $k>0$，且对于任意 $x\in R$，$f(|x|)>0$ 恒成立，试确定实数 k 的取值范围；

（Ⅱ）若对于任意 $x\in[-1，1]$，都有 $ax^3\geq 3x-1$ 成立，求实数 a 的值.

三明市A片区高中联盟校2013－2014学年第一学期阶段性考试试卷

高二数学（理科）参考答案

（考试时间：120分钟　满分：150分）

一. 选择题：（本大题共10小题，每小题5分，共50分.）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	B	C	D	D	B	A	B	C

二. 填空题：（本大题共5小题，每小题4分，共20分）

11. $e^2-e-\ln 2$；　12. $\dfrac{y^2}{2}-\dfrac{x^2}{4}=1$；　13. $\dfrac{4-\pi}{4}$；　14. ②③；　15. $\left(1,1+\dfrac{1}{e}\right)$.

三. 解答题（本大题共6小题，共80分.）

16. 解析：$f'(x)=x^2-2x-3=(x+1)(x-3)$　　2分

$\therefore$令$f'(x)=0$，解得$x=-1$，或$x=3$.　　4分

当x变化时，$f'(x)$、$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 3)$	3	$(3, +\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递增↗	$\dfrac{23}{3}$	单调递减↘	-3	单调递增↗

7分

$\therefore$当x=－1时，$f(x)$有极大值，$f(x)_{极大值}=f(-1)=\dfrac{23}{3}$，

当x=3时，$f(x)$有极小值，$f(x)_{极小值}=f(3)=-3$　　9分

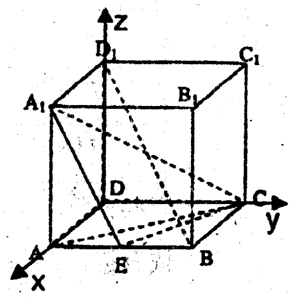
又$f(-2)=\dfrac{16}{3}$，$f(5)=\dfrac{23}{3}$，　　11分

$\therefore f(x)$在区间[－2，5]上的最大值为$\dfrac{23}{3}$，最小值为－3.　　13分

17. 解析：（1）以DA，DC，DD_1为坐标轴，建立空间直角坐标系如图，设正方体的棱长为1，则$A_1(1，0，1)$，$B(1，1，0)$，$C(0，1，0)$，$D_1(0，0，1)$，$E(1，\dfrac{1}{2}，0)$　　2分

$\therefore \overrightarrow{BD_1}=(-1,-1,1)$，$\overrightarrow{CE}=(1,-\dfrac{1}{2},0)$，

$\therefore \overline{BD_1}\cdot\overline{CE}=-\frac{1}{2}$，$|\overline{BD_1}|=\sqrt{3}$，$|\overline{CE}|=\frac{\sqrt{5}}{2}$



$\therefore \cos\langle\overline{BD_1},\overline{CE}\rangle=\frac{\overline{BD_1}\cdot\overline{CE}}{|\overline{BD_1}|\cdot|\overline{CE}|}=-\frac{\sqrt{15}}{15}$，　　6 分

∴异面直线 BD_1 与 CE 所成角的余弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{15}$.　　7 分

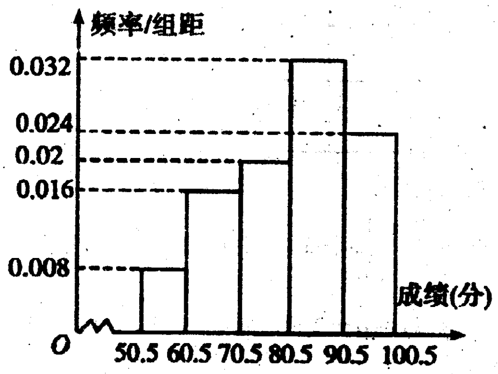
（2）DD_1⊥平面 AEC，所以 $\overline{DD_1}$ 为平面 AEC 的法向量，$\overline{DD_1}=(0,0,1)$，　　9 分

设平面 A_1EC 法向量为 $\vec{n}=(x,y,z)$，又 $\overline{A_1E}=(0,\frac{1}{2},-1)$，$\overline{A_1C}=(-1,1,-1)$，

由 $\begin{cases}\vec{n}\cdot\overline{A_1E}=0\\ \vec{n}\cdot\overline{A_1C}=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}\frac{1}{2}y-z=0\\ -x+y-z=0\end{cases}$，取 z＝1，则 $\vec{n}=(1,2,1)$，　　11 分

所以 $\cos<\overline{DD_1},\vec{n}>=\frac{\sqrt{6}}{6}$，　　12 分

因二面角 A_1-EC-A 为锐角 θ，故 $\cos\theta=\frac{\sqrt{6}}{6}$.　　13 分



18．解：（1）直方图如图所示：　　4 分

（2）由已知：落在［70.5，80.5)的频率为 0.2，

所以我们认为落在［75.5，80.5）的频率为 0.1；

落在［80.5，90.5)的频率为 0.32，

所以我们认为落在［80.5，85.5）的频率为 0.16；

所以落在［75.5，85.5)的频率为 0.1+0.16＝0.26.

所以落在［75.5，85.5)的学生数为 0.26×900=234.

即获得三等奖的学生大约有 234 人.　　9 分

（3）设本次网络安全知识竞赛成绩的中位数为 x，则

∵0.08＋0.16＋0.20＝0.44，∴(x－80.5)×0.32＝0.06×10，∴x＝82.375.

平均数为 55.5×0.08＋65.5×0.16＋75.5×0.2＋85.5×0.32＋95.5×0.24＝80.3.

∴本次网络安全知识竞赛成绩的中位数和平均数分别为 82.375、80.3.　　13 分

19. 解：（1）由茎叶图可知最快成绩为 6.4，

若（$7+\frac{x}{10}$）是最慢成绩，则平均成绩为

$\frac{1}{8}(6.5+6.8+6.9+7.0+7.2+7.4+7.5+7.1)=7.05\neq 7.0$，

所以最慢成绩只能是 7.5.　　（2 分）

从而由$\frac{1}{8}(6.5+6.8+6.9+7.0+7.2+7.4+7.1+7+\frac{x}{10})=7.0$，

解得 x=1.　　（4 分）

（2）输出的结果是 6.4，6.5，6.8，6.9，7.0.　　（9 分）

（3）随机抽取 2 个成绩所有的可能结果有：

（6.4，6.5），（6.4，6.8），（6.4，6.9），（6.4，7.0），（6.5，6.8），（6.5，6.9），（6.5，7.0），

（6.8，6.9），（6.8，7.0），（6.9，7.0）共 10 种结果；　　（11 分）

2 个成绩之和小于 13.5（记为事件 B）的所有可能结果有：

（6.4，6.5），（6.4，6.8），（6.4，6.9），（6.4，7.0），（6.5，6.8），（6.5，6.9）共 6 种结果；（12 分）

所以$P(B)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$.　　（13 分）

20. 解：（1）∵椭圆C和双曲线：$\frac{x^2}{2}-y^2=1$有相同的焦点，

∴$F_1(-\sqrt{3},0)$,$F_2(\sqrt{3},0)$，　即c＝$\sqrt{3}$，　　（2分）

又$\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，∴a＝2，　　（3分）

∴$b=\sqrt{a^2-c^2}=\sqrt{4-3}=1$，　　（4分）

∴所求椭圆C的方程为：$\frac{x^2}{4}+y^2=1$　　（5分）

（2）猜想：直线QN与圆O相切，（6分）

下面给出证明：设$K(x_0,y_0)$，则$\frac{x_0^2}{4}+y_0^2=1$.

因为$HK=KQ$，所以$Q(x_0,2y_0)$，所以$OQ=\sqrt{x_0^2+(2y_0^2)}=2$，（7分）

所以Q点在以O为圆心，2为半径的的圆上．即Q点在以AB为直径的圆O上．（8分）

又$A(-2,0)$，所以直线AQ的方程为$y=\frac{2y_0}{x_0+2}(x+2)$.（9分）

令$x=2$，得$D\left(2,\frac{8y_0}{x_0+2}\right)$.（10分）

又$B(2,0)$，N为DB的中点，所以$N\left(2,\frac{4y_0}{x_0+2}\right)$.（11分）

所以$\overline{OQ}=(x_0,2y_0)$，$\overline{NQ}=\left(x_0-2,\frac{2x_0y_0}{x_0+2}\right)$.（12分）

所以$\overline{OQ}\cdot\overline{NQ}=x_0(x_0-2)+2y_0\cdot\frac{2x_0y_0}{x_0+2}=x_0(x_0-2)+\frac{4x_0y_0^2}{x_0+2}=x_0(x_0-2)+\frac{x_0(4-x_0^2)}{x_0+2}$

$=x_0(x_0-2)+x_0(2-x_0)=0$.（13分）

所以$\overline{OQ}\perp\overline{NQ}$．故直线$QN$与圆$O$相切.（14分）

（用斜率等其他方法参照给分）

21.（Ⅰ）①解：由$k=e$得$f(x)=e^x-ex$，所以$f'(x)=e^x-e$.

由$f'(x)>0$得$x>1$，故$f(x)$的单调递增区间是$(1,+\infty)$，

由$f'(x)<0$得$x<1$，故$f(x)$的单调递减区间是$(-\infty,1)$.　4分

②由$f(|-x|)=f(|x|)$可知$f(|x|)$是偶函数.

于是$f(|x|)>0$对任意$x\in R$成立等价于$f(x)>0$对任意$x\geqslant0$成立.

由$f'(x)=e^x-k=0$得$x=\ln k$.　5分

(1)当$k\in(0,1]$时，$f'(x)=e^x-k>1-k\geqslant0(x>0)$.

此时$f(x)$在$[0,+\infty)$上单调递增．故$f(x)\geqslant f(0)=1>0$，符合题意.　6分

(2)当$k\in(1,+\infty)$时，$\ln k>0$.

当x变化时$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(0,\ln k)$	$\ln k$	$(\ln k,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	单调递减	极小值	单调递增

由此可得，在$[0,+\infty)$上，$f(x)\geqslant f(\ln k)=k-k\ln k$.

依题意，$k-k\ln k>0$，又$k>1,\therefore 1<k<\mathrm{e}$. 8 分

综合①，②得，实数k的取值范围是$0<k<\mathrm{e}$. 9 分

（II）解析：**方法一**：设$g(x)=ax^3-3x+1$，则$g'(x)=3ax^2-3$， 10 分

当$a\leq 0$时，有$g'(x)=3ax^2-3<0$，$\therefore g(x)$在$[-1,1]$上为减函数，

$\therefore g(x)_{最小值}=g(1)=a-2\geq 0$，解得$a\geq 2$与$a\leq 0$矛盾，不符合题意； 11 分

当$a>0$时，令$g'(x)=0$，解得$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{a}}$，

当x变化时$g'(x)$，$g(x)$的变化情况如下表：

	$(-\infty,-\frac{1}{\sqrt{a}})$	$-\frac{1}{\sqrt{a}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{a}},\frac{1}{\sqrt{a}})$	$\frac{1}{\sqrt{a}}$	$(\frac{1}{\sqrt{a}},+\infty)$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	↗	极小值	↘	极大值	↗

12 分

①当$0<a\leqslant 1$时，$\dfrac{1}{\sqrt{a}}\geqslant 1$，$\therefore g(x)$在$[-1,1]$上是减函数，

$\therefore g(x)_{最小值}=g(1)=a-2\geq 0$，解得$a\geq 2$与$0<a\leq 1$矛盾，不符合题意；

②当$a>1$时，$\dfrac{1}{\sqrt{a}}<1$，$\therefore g(x)$在$[-1,-\dfrac{1}{\sqrt{a}}]$和$[\dfrac{1}{\sqrt{a}},1]$上是增函数，在$(-\dfrac{1}{\sqrt{a}},\dfrac{1}{\sqrt{a}})$上是减函数，$\therefore g(\dfrac{1}{\sqrt{a}})=a\times\dfrac{1}{a\sqrt{a}}-\dfrac{3}{\sqrt{a}}+1=1-\dfrac{2}{\sqrt{a}}\geq 0$且$g(-1)=4-a\geq 0$，

解得$a\geqslant 4$且$a\leqslant 4$，$\therefore a=4>1$.

综上得$a=4$. 14 分

方法二：同法一

由$g(-1)=4-a\geq 0$得：$0<a\leq 4$，

又由$g(\dfrac{1}{\sqrt{a}})=a\times\dfrac{1}{a\sqrt{a}}-\dfrac{3}{\sqrt{a}}+1=1-\dfrac{2}{\sqrt{a}}\geq 0$，得$a\geq 4$，

综上得 $a=4$. 14 分

方法三：由 $ax^3\geq 3x-1$ 得，

①当 $x=0$ 时，$a\in R$. 10 分

②当 $0<x\leqslant 1$ 时，$a\geq\frac{3x-1}{x^3}$，设 $h(x)=\frac{3x-1}{x^3}$，令 $h'(x)=\frac{3(-2x+1)}{x^4}=0$，得 $x=\frac{1}{2}$，

$\therefore$ 在 $(0,\ \frac{1}{2})$ 上是增函数，在 $(\frac{1}{2},\ 1)$ 是减函数，

$\therefore$ 在 $(0,\ 1]$ 上，$h(x)_{最大值}=h(\frac{1}{2})=4$，$\therefore a\geqslant 4$. 12 分

③当 $-1\leqslant x<0$ 时，$a\leq\frac{3x-1}{x^3}$，由 $h(x)=\frac{3x-1}{x^3}$ 得，$h'(x)=\frac{3(-2x+1)}{x^4}>0$，

$\therefore h(x)$ 在 $[-1,\ 0)$ 上是增函数.

$\therefore$ 在 $[-1,\ 0)$ 上 $h(x)_{最小值}=h(-1)=4$，$\therefore a\leqslant 4$.

$\because$ 对于任意 $x\in[-1,\ 1]$，都有 $ax^3\geq 3x-1$ 成立，

$\therefore$ 由①②③得 $a=4$. 14 分