第六章　重积分

第一节　求重积分的基本方法

一、定义：　设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数。将区域 D 任意分成 n 个小区域

$\Delta\sigma_1,\Delta\sigma_2,\cdots,\Delta\sigma_n$ 且以 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小区域的面积，在每个小区域 $\Delta\sigma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 上任意取一点 (x_i,y_i)，用 d_i 表示第 i 个小区域的直径，记 $\lambda=Max\{d_1,d_2,\cdots,d_n\}$，如果无论对 D 和点 (x_i,y_i) 怎样分法怎样取，只要当 $\lambda\to 0$ 时，和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\cdot\Delta\sigma_i$ 的极限总存在，则称此极限为 $f(x,y)$ 在 D 上的二重积分，记作 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\cdot\Delta\sigma_i$

其中 $f(x,y)$ 叫做被积函数， $f(x,y)d\sigma$ 叫做被积表达式， x与y 叫做积分变量， D 叫做积分区域， $\sum\limits_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\cdot\Delta\sigma_i$ 叫做积分和， $d\sigma$ 叫做面积元素。

*二重积分在直角坐标系中可表示为：$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

其中 $dxdy$ 叫做直角坐标系中面积元素。

二、二重积分的性质

性质 1　常数可以 $\iint\limits_D kf(x,y)d\sigma=k\iint\limits_D f(x,y)dxdy$

性质 2 被积可加 $\iint\limits_D [f(x,y)\pm g(x,y)]d\sigma=\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\pm\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$

性质 3 区域可加　$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_{D_1} f(x,y)d\sigma+\iint\limits_{D_2} f(x,y)d\sigma$

性质 4 递增：若 $f(x,y)\le g(x,y),(x,y)\in D$，则 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma\le\iint\limits_D g(x,y)d\sigma$

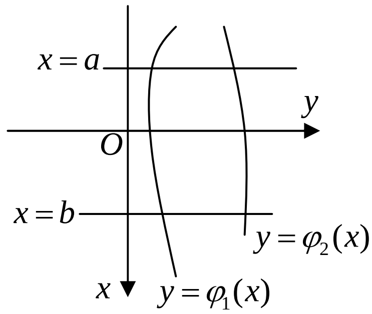
性质 5、积分中值定理：　如果 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则在 D 上至少存在一点 $(\xi,\eta)\in D$ 使得 $\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=f(\xi,\eta)A$ 成立。

三、化为二次积分

1. X—型区域:若积分区域 $D=\{(x,y)\mid \varphi_1(x)\le y\le \varphi_2(x), a\le x\le b\}$ 则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]dx \qquad (1)$$

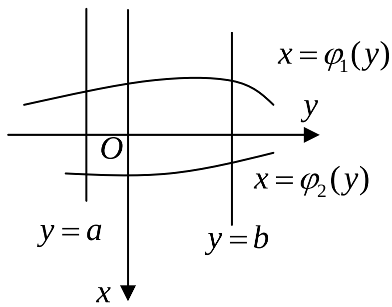
(此类区域的特点为：用平行于 y 轴的直线穿过区域 D 的内部时与 D 的边界曲线相交恰好两个交点)



2、称为 Y—型区域: $D=\{(x,y)\mid \phi_1(y)\le x\le \phi_2(y), c\le y\le d\}$ 则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\int_c^d\left[\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx\right]dy \qquad (2)$$

(此类区域的特点为：用平行于 x 轴的直线穿过区域 D 的内部时与 D 的边界曲线相交恰好两个交点)



3、注意

(1)在计算 $\left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)dy\right]$ 时，把 x 看成常数；

在计算 $\int_{\phi_1(y)}^{\phi_2(y)} f(x,y)dx$ 时，把 y 看成常数。

(2)若区域 D 既不是 X—型区域，也不是 Y—型区域，则可用平行于坐标轴的直线把它分成几个部分区域，使每个部分区域是 X—型区域或 Y—型区域，然后利用公式(1)或(2)计算。

4、计算二重积分的步骤：

(1)画出积分区域图，并确定积分区域的类型；

(2)若积分区域 D 只是 X—型区域，则用公式(1)，若积分区域 D 只是 Y—型区域，则用公式(2)，积分区域 D 既是 X—型区域又是 Y—型区域，则要根据被积函数的特点确定用(1)还是用(2)计算。

例 1.求二重积分 $\iint\limits_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma$，其中 D：$0 \le x \le \pi$，$0 \le y \le \pi$；

解： $\iint\limits_D \sin^2 x \sin^2 y d\sigma = \int_0^\pi \sin^2 y dy \int_0^\pi \sin^2 x dx = \left(\int_0^\pi \sin^2 x dx\right)^2$

而 $\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos 2x)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$，$\therefore$ 所求 $= \frac{\pi^2}{4}$

例 2.求二重积分 $\iint\limits_D (3x+2y)d\sigma$，闭区域 D 由坐标轴与 $x+y=2$ 所围成;

解： 积分区域 D：$0 \le x \le 2$，$0 \le y \le 2-x$

$\therefore$ 所求 $= \int_0^2 dx \int_0^{2-x} (3x+2y)dy = \int_0^2 \left[3xy + y^2\right]_0^{2-x} dx = \int_0^2 3x(2-x) + (2-x)^2 dx$

$= \int_0^2 \left[6x - 3x^2 + (2-x)^2\right]dx = \left[3x^2 - x^3 - \frac{(2-x)^3}{3}\right]_0^2 = \frac{20}{3}$

例 3. 求 $\iint\limits_D (x^3 + 3x^2 y + y^3)d\sigma$，其中 D：$0 \le x \le 1$，$0 \le y \le 1$;

解： $\iint\limits_D (x^3 + 3x^2 y + y^3)d\sigma = \int_0^1 dx \int_0^1 (x^3 + 3x^2 y + y^3)dy$

$= \int_0^1 \left[x^3 y + \frac{3}{2}x^2 y^2 + \frac{y^4}{4}\right]_0^1 dx = \int_0^1 \left(x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}\right)dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x\right]_0^1 = 1$

例 4. 求 $\iint\limits_D (x^2 - y^2)d\sigma$，其中 D：$0 \le y \le \sin x$，$0 < x < \pi$.

解： $\iint\limits_D (x^2 - y^2)d\sigma = \int_0^\pi dx \int_0^{\sin x} (x^2 - y^2)dy = \int_0^\pi \left[x^2 y - \frac{y^3}{3}\right]_0^{\sin x} dx$

$= \int_0^\pi \left(x^2 \sin x - \frac{\sin^3 x}{3}\right)dx = -\int_0^\pi x^2 d\cos x + \int_0^\pi \frac{1-\cos^2 x}{3} d\cos x$

$= -\left[x^2 \cos x\right]_0^\pi + \int_0^\pi 2x\cos x dx + \left[\frac{\cos x}{3} - \frac{\cos^3 x}{9}\right]_0^\pi$

其中 $\int_0^\pi 2x\cos x dx = \int_0^\pi 2x d\sin x = \left[2x\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2\sin x dx = \left[2\cos x\right]_0^\pi = -4$

$\therefore$ 所求 $= \pi^2 - \frac{40}{9}$