第三节　　三重积分

一、化为三次积分

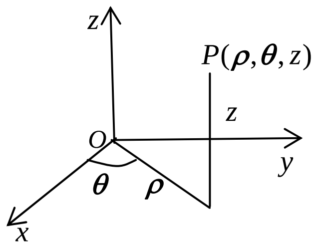
例 1.计算$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dv$，其中$\Omega$是由曲面$z=xy$，$y=x$，$x=1$，$z=0$所围成的区域。

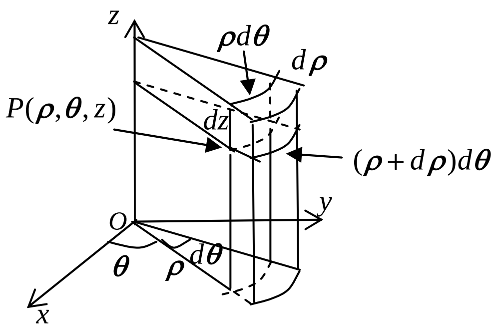
解: 积分区域可表示为Ω：$0\le z\le xy$，$0\le y\le x$，$0\le x\le 1$

所以$\iiint\limits_{\Omega} xy^2z^3dv = \int_0^1 xdx\int_0^x y^2dy\int_0^{xy} z^3dz = \frac{1}{4}\int_0^1 x^5dx\int_0^x y^6dy = \frac{1}{28}\int_0^1 x^{12}dx = \frac{1}{364}$

二、柱坐标代换

作柱坐标代换：$\begin{cases} x=\rho\cos\theta \\ y=\rho\sin\theta \\ z=z \end{cases}$





则

$dv\approx\frac{1}{2}[\rho d\theta+(\rho+d\rho)d\theta]d\rho dz=(\rho+d\rho)d\theta]d\rho dz\approx\rho d\theta d\rho dz$

于是$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega'} f(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta,z)\rho d\rho d\theta dz$

例 1.利用柱面坐标计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} zdv$，其中积分区域$\Omega$由曲面$x^2+y^2+z^2=4$及$3z=x^2+y^2$所围成（在抛物面内的那一部分）

解: 曲域Ω的边界是曲面$x^2+y^2+z^2=4$，$3z=x^2+y^2$

曲域Ω的边界：上曲面$x^2+y^2+z^2=4$化为$\rho^2+z^2=4$，$z=\sqrt{4-\rho^2}$

下曲面$3z=x^2+y^2$化为$3z=\rho^2, z=\frac{\rho^2}{3}$

由$\rho^2+z^2=4$与$z=\frac{\rho^2}{3}$消去 z 得$\rho=\sqrt{3}$

故Ω'：$0\le\theta\le 2\pi$，$0\le\rho\le\sqrt{3}$，$\frac{\rho^2}{3}\le z\le\sqrt{4-\rho^2}$

$\iiint\limits_{\Omega} zdv=\iiint\limits_{\Omega'} z\rho d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} zdz$

$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho(4-\rho^2-\frac{\rho^4}{9})dr=\pi\int_0^{\sqrt{3}}(4r-\rho^3-\frac{\rho^5}{9})d\rho=\frac{13\pi}{4}$

例 2.计算$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dv$，其中$\Omega$由平面$y+z=4$，$x+y+z=1$与圆柱面$x^2+y^2=1$所围成的闭区域。

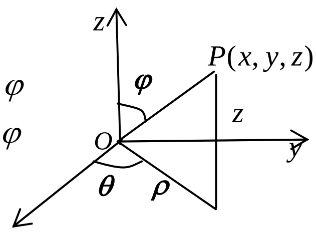
解： Ω在xOy面上的投影为$D: x^2+y^2\le 1$，而当$(x,y)\in D$时，易证$1-x-y\le 4-y$所以平面$z=4-y$位于平面$z=1-x-y$的上方，采用柱坐标在平面xOy上取点(ρ,θ)作垂直于平面xOy的垂线与下面和上面的交点竖坐标分别为$z=4-\rho\sin\theta$和$z=1-\rho\cos\theta-\rho\sin\theta$

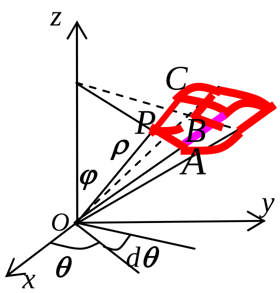
被积函数$\sqrt{x^2+y^2}=\rho$

$$\iiint\limits_{\Omega}\sqrt{x^2+y^2}dv=\iiint\limits_{\Omega'}\rho^2 d\rho d\theta dz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho^2 d\rho\int_{1-\rho\cos\theta-\rho\sin\theta}^{4-\rho\sin\theta}dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1(3+\rho\cos\theta)\rho^2 d\rho=\int_0^{2\pi}\left[\rho^3+\frac{\rho^4}{4}\cos\theta\right]_0^1 d\theta=\left[\theta+\frac{1}{4}\sin\theta\right]_0^{2\pi}=2\pi$$

三、球面坐标变换





作球面坐标代换：$\begin{cases}x=\rho\cos\theta\sin\varphi\\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi\\ z=\rho\cos\varphi\end{cases}$

如图$PA\approx\rho d\varphi,\ PB\approx(\rho\sin\theta)d\varphi,\ PC\approx d\rho$

$dv\approx PA\times PB\times PC\approx\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$

于是$\iiint\limits_{\Omega}f(x,y,z)dv=\iiint\limits_{\Omega'}f(\rho\cos\theta\sin\varphi,\rho\sin\theta\sin\varphi,\rho\cos\varphi)\rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\varphi$

例 1.计算密度函数为$\mu=x^2+y^2+z^2$的立体Ω的质量M，这里Ω是由球面$x^2+y^2+z^2=R^2$与锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$所围成的区域（锥面的内部）

解： 由题意知$M=\iiint\limits_{V}\left(x^2+y^2+z^2\right)dv$

立体Ω的表面：$x^2+y^2+z^2=R^2$与$z=\sqrt{x^2+y^2}$

作球面坐标代换$x=\rho\cos\theta\sin\varphi, y=\rho\sin\theta\sin\varphi, z=\rho\cos\varphi$

$x^2+y^2+z^2=R^2$化为$\rho^2=R^2,\rho=R$

$z=\sqrt{x^2+y^2}$ 化为 $\rho\cos\varphi=\rho\sin\varphi,\tan\varphi=1,\varphi=\dfrac{\pi}{4}$

于是Ω： $0\le\rho\le R,0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{4},0\le\theta\le 2\pi$

被积函数 $\mu=x^2+y^2+z^2=\rho^2$

$$M=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi d\varphi\int_0^R\rho^4 d\rho=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\varphi\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^R d\varphi$$

$$=2\pi\bullet\left[-\cos\phi\right]_0^{\frac{\pi}{4}}\bullet\left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^R=\frac{2\pi R^5}{5}(1-\frac{\sqrt{2}}{2})$$

例 2.利用三重积分求由曲面 $z^2=x^2+y^2$，$z=1$ 所围成的立体的重心（设密度 $\rho=1$）。

解：设重心 $Q(x,y,z)$

这是一个锥体，由对称性易知，$\bar{x}=\bar{y}=0$，

利用柱坐标计算，

投影区域 $D_{xy}:x^2+y^2\le 1$ 及 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 1$，即 $r\le z\le 1$，于是

$$M=\iiint_\Omega 1\bullet dv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 dr\int_r^1 rdz=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r(1-r)dr=\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^3}{3}\right]_0^1 d\theta=\frac{\pi}{3}$$

静矩

$$M_{xy}=\iiint_\Omega\rho zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 rdr\int_r^1 zdz=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\left(r-r^3\right)dr=\pi\left[\frac{r^2}{2}-\frac{r^4}{4}\right]_0^1=\frac{\pi}{4}$$

$\therefore\bar{z}=\dfrac{M_{xy}}{M}=\dfrac{3}{4}$，故重心坐标为 $\left(0,0,\dfrac{3}{4}\right)$

四、一般换元也有与二元类似的雅可比行列式