第二节　求重积分的极坐标代换法

一、极坐标代换公式

设通过原点的射线与区域D的边界曲线的交点不多余两点，

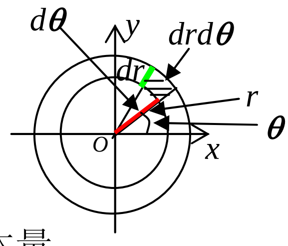
在空间坐标系 O-xyz 中，平面 xoy 内的极坐标代换是

$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$，则

$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot rdrd\theta = \int_\alpha^\beta \left[\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot rdr\right]d\theta$$

或$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_\alpha^\beta d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

或$\iint_D f(x,y)d\sigma = \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} rdr \int_\alpha^\beta f(r\cos\theta, r\sin\theta)d\theta$



其中$rdrd\theta$叫做极坐标系中面积元素。

说明：(1)要把$d\sigma$变为$rdrd\theta$表示应以dr与$d\boldsymbol{\theta}$为基本量

(2)$d\sigma = rdrd\theta$的推导

$\because \ d\sigma \approx \frac{1}{2}(r+dr)^2 d\theta - \frac{1}{2}r^2 d\theta = [rdr + (dr)^2]d\theta \approx rdrd\theta$

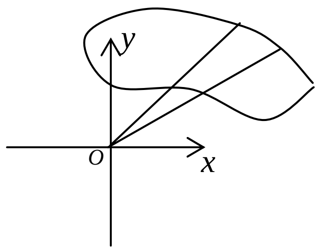
$\therefore \ d\sigma = rdrd\theta$

二．极坐标代换的分类

1．极点O在区域D之外，此时积分区域D可表示为

$$D = \{(r,\theta) \mid r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$$ 则

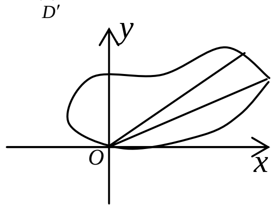
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot rdrd\theta = \int_\alpha^\beta \left[\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot rdr\right]d\theta$$



2．极点O在区域D的边界上，此时积分区域D可表示为

$$D = \{(r,\theta) \mid 0 \le r \le r(\theta), \alpha \le \theta \le \beta\}$$ 则

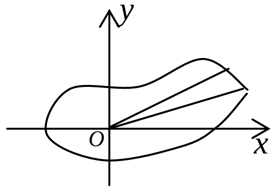
$$\iint_D f(x,y)d\sigma = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot rdrd\theta = \int_\alpha^\beta \left[\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot rdr\right]d\theta$$



3．极点O在区域D的内部，此时积分区域D可表示为

$$D=\{(r,\theta)\,|\,0\le r\le r(\theta),0\le\theta\le 2\pi\}$$ 则

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma=\iint\limits_D f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot rdrd\theta=\int_0^{2\pi}\left[\int_0^{r(\theta)} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot rdr\right]d\theta$$



例.化二重积分$\iint\limits_D f(x,y)dxdy$为极坐标形式的二次积分，其中积分区域$D$为（1） $x^2+y^2\le 9$　　（2）$1\le x^2+y^2\le 4$　　（3） $x^2+y^2\le 2x$

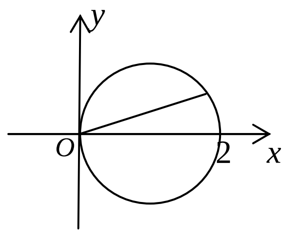
解：（1）积分区域为圆域，$x^2+y^2\le 9\Leftrightarrow r^2\le 9,0\le\theta\le 2\pi\Leftrightarrow 0\le r\le 3,0\le\theta\le 2\pi$

故$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

（2）积分区域为环域

$1\le x^2+y^2\le 4\Leftrightarrow 1\le r^2\le 4,0\le\theta\le 2\pi\Leftrightarrow 1\le r\le 2,0\le\theta\le 2\pi$

故$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$



（3）积分区域为圆心在$(1,0)$，半径为 1 的圆域，

$x^2+y^2\le 2x\Rightarrow r^2\le 2r\cos\theta\Rightarrow 0\le r\le 2\cos\theta$

$r\le 2\cos\theta\Rightarrow\cos\theta\ge 0$它在一周期的解是$-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$

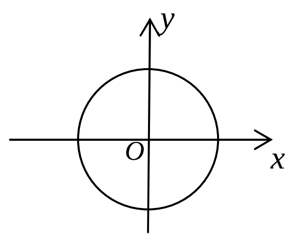
故$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)\cdot rdr$

三、举例

例 1、求重积分$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma$，其中$D$是由$x^2+y^2=9$所围成的闭区域。

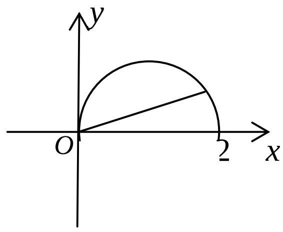
解： $x^2+y^2\le 9$得$0\le r\le 3,0\le\theta\le 2\pi$，

把$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$代入$e^{x^2+y^2}$得，$e^{x^2+y^2}=e^{r^2}$



$$\iint\limits_D e^{x^2+y^2}d\sigma=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^3 re^{r^2}dr=\frac{1}{2}\bullet 2\pi\bullet e^{r^2}\Big|_0^3=\pi(e^9-1)$$

例 2、求重积分$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma$，其中$D$是由$x^2+y^2=2ax$与$x$轴所围成的上半部分闭区域。



解：画出积分区域的草图知

区域D的直角坐标表示：$0 \le x \le 2a$，$0 \le y \le \sqrt{2ax-x^2}$，

区域D的极坐标表示：

由$x^2+y^2 \le 2ax$得$r^2 \le 2ar\cos\theta \Rightarrow 0 \le r \le 2a\cos\theta$

由$x=\cos\theta \ge 0, y=\cos\theta \ge 0$在一周期的解是$0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}$，

被积函数x^2+y^2化为：$x^2+y^2=(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2=r^2$

$$\iint\limits_D (x^2+y^2)d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a\cos\theta} r^3 dr = 4a^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta = 4a^4 \bullet \frac{3}{4}\frac{1}{2} \bullet \frac{\pi}{2} = \frac{3}{4}\pi a^4$$

例 3、求重积分

$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma$，其中$D$是由圆周$x^2+y^2=4$与坐标轴所围成的在第一象限内的闭区域。

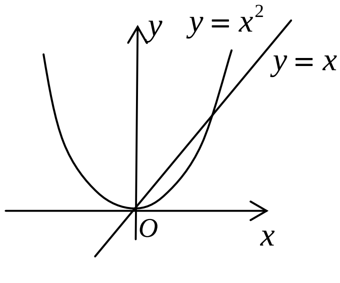
解：$$\iint\limits_D \ln(1+x^2+y^2)d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^2 \ln(1+r^2) r dr = \frac{1}{2} \bullet \frac{\pi}{2} \bullet \int_0^2 \ln(1+r^2) d(1+r^2)$$

$$= \frac{\pi}{4}\left\{\left[(1+r^2)\ln(1+r^2)\right]_0^2 - \int_0^2 (1+r^2) d\ln(1+r^2)\right\} = \frac{\pi}{4}(5\ln 5 - 4)$$

例 4．求重积分

$\iint\limits_D (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} d\boldsymbol{\sigma}$，其中 D 是由$y=x^2$与$y=x$所围成的闭区域。

解：区域D的极坐标表示：



由$y \ge x^2$得　$r\sin\theta \ge r^2\cos^2\theta, 0 \le r \le \tan\theta\sec\theta$

由$y \le x$得，$\tan\boldsymbol{\theta} \le 1, 0 \le \boldsymbol{\theta} \le \dfrac{\boldsymbol{\pi}}{4}$

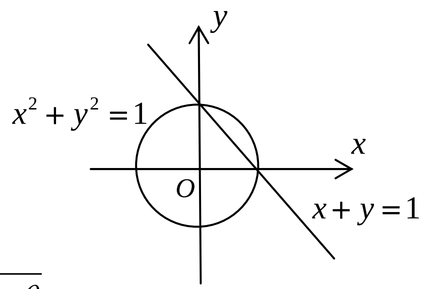
被积函数$(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} = (r^2)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{r}$

$$\iint_D (x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}} d\sigma = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\tan\theta\sec\theta} \frac{1}{r} r dr = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} d\theta$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d\cos\theta}{\cos^2\theta} = \left[\frac{1}{\cos\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}-1$$

例 5．求重积分

$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} d\boldsymbol{\sigma}$，其中 D： $x^2+y^2 \le 1$， $x+y \ge 1$



解：积分区域D

由$x^2+y^2 \le 1$得$0 \le r \le 1$

由 $x+y \ge 1$得， $r\sin\boldsymbol{\theta} + r\cos\boldsymbol{\theta} \ge 1$， $r \ge \frac{1}{\sin\theta+\cos\theta}$

被积函数$\frac{x+y}{x^2+y^2} = \frac{r\sin\boldsymbol{\theta} + r\cos\boldsymbol{\theta}}{r^2} = \frac{\sin\boldsymbol{\theta}+\cos\boldsymbol{\theta}}{r}$

$$\iint_D \frac{x+y}{x^2+y^2} d\sigma = \iint_D \frac{r\cos\theta + r\sin\theta}{r^2} \bullet r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{1} (\cos\theta+\sin\theta) dr$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta+\sin\theta)\left(1-\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\right) d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\theta+\sin\theta-1) d\theta = (\sin\theta-\cos\theta-\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2-\frac{\pi}{2}$$