第八章　功与格林公式

第一节　　在力场曲线上做的功

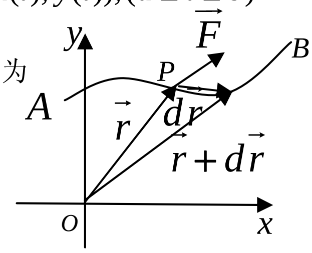
1：例如在点 M 处力 $\vec{F}=(3,4)$ 即在 x 轴与 y 轴方向的分力分别为 3 和 4

由 $\vec{F}=(3,4)$ 产生的位移 $d\vec{r}=(dx,dy)$ 所做的功为 $W=3dx+4dy=(3,4)\bullet(dx,dy)$

这是向量的数量积

2、设平面上的力场 $\vec{F}=(P(x,y),Q(x,y))$，平面上的曲线 L 是 $\vec{r}=(x(t),y(t)),(a\le t\le b)$

则力场沿着曲线曲线 L，从 $A(x(a),y(a))$到$B(x(b),y(b))$ 所着的功应为



$$W=\int_L \vec{F}\bullet d\vec{r}=\int_L (P,Q)\bullet(dx,dy)=\int_L Pdx+Qdy$$
$$=\int_a^b [P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

$$\text{或}W=\int_L \vec{F}\bullet d\vec{r}=\int_a^b \vec{F}\bullet\vec{r}'\,dt=\int_a^b (P(x(t),y(t)),Q(x(t),y(t)))\bullet(x'(t),y'(t))dt$$
$$=\int_a^b [P(x(t),y(t))x'(t)+Q(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

例 1、求力场 $\vec{F}(x,y)=x^2\vec{i}-xy\vec{j}$ 沿四分之一圆周 $\vec{r}=\cos t\vec{i}+\sin t\vec{j},0\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ 移动质点所作的功

解：因 $x=\cos t,y=\sin t,0\le t\le\dfrac{\pi}{2},\vec{r}=(\cos t,\sin t),\vec{r}_t{}'=(-\sin t,\cos t)$

$\qquad\vec{F}=x^2\vec{i}+xy\vec{j}=(\cos^2 t,-\cos t\sin t)$，

$$\text{故}W=\int_L \vec{F}\bullet d\vec{r}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\vec{F}\bullet\vec{r}_t{}'\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos^2 t,-\cos t\sin t)\bullet(-\sin t,\cos t)dt$$
$$=-2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin t dt=\frac{2\cos^2 t}{3}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=-\frac{2}{3}$$

这个公式对三维空间也成立

例 2、计算力场 $\vec{F}(x,y,z)=(xy,yz,zx)$,沿三次挠线 L: $x=t,y=t^2,z=t^3,0\le t\le 1$ 移动质点所作的功

解:$\vec{r}(t)=(t,t^2,t^3),\vec{r}'(t)=(1,2t,3t^2),\vec{F}=(t^3,t^5,t^4)$

$$W=\int_L \vec{F}\bullet d\vec{r}=\int_0^1\vec{F}\bullet\vec{r}'\,dt=\int_0^1(t^3+5t^6)dt=(\frac{t^3}{4}+\frac{5t^7}{7})\Bigg|_0^1=\frac{27}{28}$$