第七章曲线与曲面的积分

第一节　　曲线积分

1、表示$\int_L f(x,y)ds$

2、化为一元：设 $f(x, y)$在曲线弧 L 上有定义且连续, L 的参数方程为 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ($\alpha\le t\le\beta$), $\varphi(t)$、$\psi(t)$在$[\alpha, \beta]$上具有一阶连续导数，则$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$ ($\alpha<\beta$).

证：因曲线弧 L 的参数方程为 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ ($\alpha\le t\le\beta$),

故$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2=[d\boldsymbol{\varphi}(t)]^2+[d\boldsymbol{\psi}(t)]^2=[\boldsymbol{\varphi}'^2(t)+\boldsymbol{\psi}'^2(t)](dt)^2$

$$ds=\sqrt{\boldsymbol{\varphi}'^2(t)+\boldsymbol{\psi}'^2(t)}dt$$

因此$\int_L f(x,y)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}dt$

(1)若曲线 L 的方程为 $y=\psi(x)(a\le x\le b)$, 则$\int_L f(x,y)ds=\int_a^b f[x,\psi(x)]\sqrt{1+\psi'^2(x)}dx$.

(2)若曲线 L 的方程为 $x=\varphi(y)(c\le y\le d)$, 则$\int_L f(x,y)ds=\int_c^d f[\varphi(y),y]\sqrt{\varphi'^2(y)+1}dy$.

(3)若曲 Γ 的方程为 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $z=\omega(t)(\alpha\le t\le\beta)$,

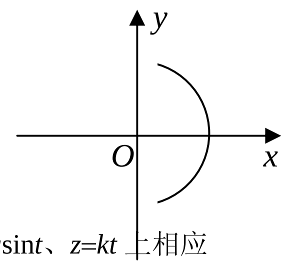
$$\int_\Gamma f(x,y,z)ds=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\omega(t)]\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\omega'^2(t)}dt$$

例 1 计算$\int_L\sqrt{y}ds$，其中 L 是抛物线 $y=x^2$ 上点 $O(0, 0)$与点 $B(1, 1)$之间的一段弧.

解:曲线 L: $y=x^2$ ($0\le x\le1$), $\int_L\sqrt{y}ds=\int_0^1\sqrt{x^2}\sqrt{1+(x^2)'^2}dx=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx=\frac{1}{12}(5\sqrt{5}-1)$.

例 2．如图，半径为 R、中心角为 2α 的圆弧 L *关于 x 轴*对称，原点是圆心，求$I=\int_L y^2ds$

解：曲线 L 的参数方程为 $x=R\cos\theta$, $y=R\sin\theta$ ($-\alpha\le\theta<\alpha$). 于是



$$I=\int_L y^2ds=\int_{-\alpha}^{\alpha}R^2\sin^2\theta\sqrt{(-R\sin\theta)^2}d\theta$$

$$=R^3\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin^2\theta d\theta=R^3(a-\sin a\cos a)$$

例 3．计算曲线积分$\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)ds$，其中 Γ 为螺旋线 $x=a\cos t$、$y=a\sin t$、$z=kt$ 上相应于 t 从 0 到达 2π的一段弧。

解：在曲线Γ上有 $x^2+y^2+z^2=(a\cos t)^2+(a\sin t)^2+(kt)^2=a^2+k^2t^2$, 并且

$$ds=\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+k^2}dt=\sqrt{a^2+k^2}dt,$$

于是　$\int_\Gamma(x^2+y^2+z^2)ds=\int_0^{2\pi}(a^2+k^2t^2)\sqrt{a^2+k^2}dt=\frac{2}{3}\pi\sqrt{a^2+k^2}(3a^2+4\pi^2k^2)$