第三节 格林公式

1、格林公式：设闭区域 D 由分段光滑的曲线 L 围成，函数 $P(x,y)$及 $Q(x,y)$在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$$，其中 L 是 D 的取正向的边界曲线.

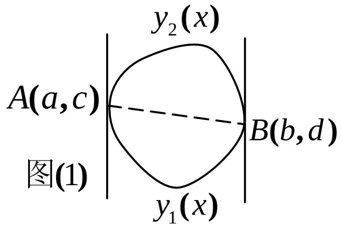
证明准备：

当曲线 L：$\vec{r}=(x,y(x)),(a\le x\le b)$ 时，$\int_L Pdx=\int_a^b P(x,y(x))dx$

当曲线 L：$\vec{r}=(x(y),y),(a\le y\le b)$ 时，$\int_L Qdy=\int_a^b Q(x(y),y)dy$

换上下限：$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

牛莱公式：$\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)$



图(1)

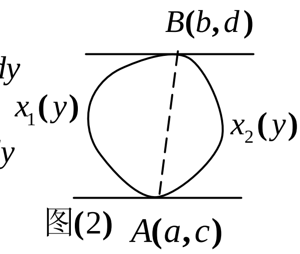
证明:

由图(1)$\oint_L Pdx=\int_{L_1}Pdx+\int_{L_2}Pdx=\int_a^b P(x,y_1(x))dx+\int_b^a P(x,y_2(x))dx$

$$=\int_a^b[P(x,y_1(x))-P(x,y_2(x))]dx=\int_a^b[-\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{\partial P(x,y)}{\partial y}dy]dx=-\iint_D\frac{\partial P}{\partial y}dxdy$$

由图(2)$\oint_L Qdy=\int_{L_1}Qdy+\int_{L_2}Qdy=\int_c^d Q(x_2(y),y)dy+\int_d^c Q(x_1(y),y)dy$

$$=\int_c^d[Q(x_2(y),y)-Q(x_1(y),y)]dy=\int_c^d[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)}\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}dy=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy$$



图(2)

于是$\oint_L Pdx+Qdy=\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy$

格林公式写成$\iint_D(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\oint_L Pdx+Qdy$形式

就类似于牛莱公式：$\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)$ 了

2、面积公式：若$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$时，则区域 D 的面积$S=\oint_L Pdx+Qdy$

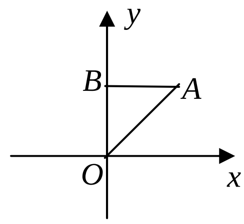
例 1、椭圆 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$ 所围成图形的面积 A.

分析:只要$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=1$，于是令$P=-\dfrac{1}{2}y$，$Q=\dfrac{1}{2}x$

解：设 D 是由椭圆 $x=a\cos\theta, y=b\sin\theta$ 所围成的区域.

于是$A=\dfrac{1}{2}\oint_L -ydx+xdy=\dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\sin^2\theta+ab\cos^2\theta)d\theta=\dfrac{1}{2}ab\int_0^{2\pi}d\theta=\pi ab$

例 2. 计算$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy$，其中 D 是以 $O(0, 0), A(1, 1), B(0, 1)$为顶点的三角形闭区域.



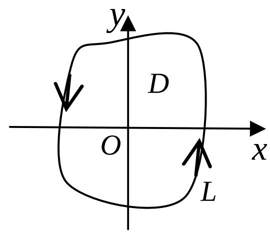
分析：要使$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^{-y^2}$，只需 $P=0$，$Q=xe^{-y^2}$.

解：令 $P=0$，$Q=xe^{-y^2}$，则$\dfrac{\partial Q}{\partial x}-\dfrac{\partial P}{\partial y}=e^{-y^2}$. 因此，由格林公式有

$$\iint\limits_D e^{-y^2}dxdy=\int\limits_{OA+AB+BO}xe^{-y^2}dy=\int\limits_{OA:y=x}xe^{-y^2}dy+\int\limits_{AB:y=1}xe^{-y^2}dy+\int\limits_{BO:x=0}xe^{-y^2}dy$$

$$=\int\limits_{OA}xe^{-x^2}dx=\int_0^1 xe^{-x^2}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-1})$$

例 3、求 $\oint_L -\frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$，$L$是包含原点的逆时针方向的简单回路

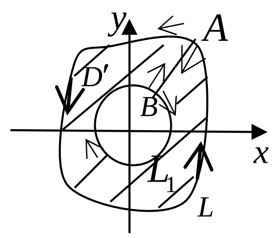


讲解：因为 $P=-\frac{y}{x^2+y^2}, Q=\frac{x}{x^2+y^2}$，所以

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{x^2+y^2-2x\cdot x}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, \frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{x^2+y^2-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

故 $\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0$，故 $\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D 0dxdy=0$

但由于 P,Q 在原点处无定义，于是格林公式在 L 围成的曲域内不成立，为了使用格林公式，



在区域 D 内作一个以原点为
圆心半径为 r 的小圆 L'，分别在 L 和 L' 上取点 A 和点 B 用线段连结
形成一个新的区域 D'，走向如图

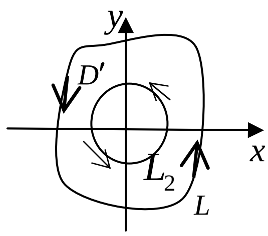
在区域区域 D' 内 P,Q 都可微于是格林公式成立，因此

$$\oint_{L+L_1+AB+BA} Pdx+Qdy=\iint_{D'}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=0$$

$$\therefore \oint_{L+L_1+AB+BA} Pdx+Qdy=\oint_L Pdx+Qdy+\oint_{L_1} Pdx+Qdy=0$$

设曲线$-L'$为$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$，则

$$dx=-r\sin\theta d\theta, dy=r\cos\theta d\theta, P=-\frac{r\sin\theta}{r^2}, Q=\frac{r\cos\theta}{r^2}$$



$$\therefore \oint_{L_1} Pdx+Qdy=-\oint_{-L_1} Pdx+Qdy=-\int_0^{2\pi}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)d\theta=-2\pi$$

$$\therefore \oint_L Pdx+Qdy=-\oint_{L_1} Pdx+Qdy=2\pi$$

注意：$\oint_L Pdx+Qdy=\oint_{L_2} Pdx+Qdy=2\pi$