第二节　线积分基本定理

一、线积分基本定理：设 $f(x,y)$ 在光滑曲线 L：$\vec{r}=(x(t),y(t)),(a\le t\le b)$ 上可微

$f(x,y)$ 的梯度向量 ∇f＝$(f_x(x,y)$，$f_y(x,y))$，若点场(比如力场)$\overrightarrow{F}(x,y)=\nabla f$，则

$$\int_L \overrightarrow{F}\bullet d\vec{r}=\int_L \nabla f\bullet d\vec{r}=\int_a^b [f_x(x(t),y(t))x'(t)+f_y(x(t),y(t))y'(t)]dt$$

，$$=\int_a^b f'(x(t),y(t))dt=f(x(t),y(t))|_a^b$$

$$=f(x(b),y(b))-f(x(a),y(a))=f(\vec{r}(b))-f(\vec{r}(a))$$

设曲线 L 的端点 A(x_1，y_1)，B(x_2，y_2)则 $\int_L \nabla f\bullet d\vec{r}$＝$f(x_2,y_2)-f(x_1,y_1)$

三维的也一样，设曲线 L 的端点 A(x_1，y_1，z_1)，B(x_2，y_2，z_2)

则 $\int_L \nabla f\bullet d\vec{r}$＝$f(x_2,y_2,z_2)-f(x_1,y_1,z_1)$

引力场 $\overrightarrow{F}=-\dfrac{GmM}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$ 是三元函数 $f(x,y,z)=\dfrac{GmM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ 的梯度

这是因为 $$\nabla f=(f_x,f_y,f_z)=(\frac{-GmMx}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{-GmMy}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{-GmMz}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}})$$

$$=\frac{-GmM}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}(x,y,z)=-\frac{GmM}{|\vec{r}|^3}\vec{r}$$

于是在引力场 $\overrightarrow{F}(\vec{r})$ 的作用下沿任何一条光滑曲线 L 从点 A(x_1，y_1，z_1)到点 B(x_2，y_2，z_2)移动质量 m 的质点所作的功

$$W=\int_L \overrightarrow{F}\bullet d\vec{r}=f(x_2,y_2,z_2)-f(x_1,y_1,z_1)=\frac{GmM}{\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}-\frac{GmM}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$$

二、保守向量场

1、当向量场 $\overrightarrow{F}$ 是某个函数的梯度时，$\overrightarrow{F}$ 叫做保守向量场

2、当 $\overrightarrow{F}$ 是保守向量场时，由线积分基本定理知 $\int_L \overrightarrow{F}\bullet d\vec{r}$ 与路径无关

3、当 $\overrightarrow{F}$ 是保守向量场时，L 是闭合曲线则 $\int_L \overrightarrow{F}\bullet d\vec{r}$＝0

4、若 $\overrightarrow{F}$ 是一个连通开区域 D 上的向量场。如果 $\int_L \overrightarrow{F}\bullet d\vec{r}$ 与路径无关，则 $\overrightarrow{F}$ 是 D 上的保守场，即存在函数 f，使 $\nabla f=\overrightarrow{F}$

5、设 $\overrightarrow{F}(x,y)=P(x,y)\vec{i}+Q(x,y)\vec{j}$ 是一个连通开区域 D 上的向量场，且 M 和 N 有连续一

阶导数，且$\dfrac{\partial P}{\partial y}=\dfrac{\partial Q}{\partial x}$在 D 上都成立，则$\vec{F}$区域 D 上保守场

6、当$\vec{F}=\nabla f$时，函数 f 叫做$\vec{F}$的势函数

例、求$\vec{F}=(4x^2+8xy,3y^2+4x^2)$的势函数

解：$\dfrac{\partial}{\partial y}(4x^2+8xy)=8x,\dfrac{\partial}{\partial x}(3y^2+4x^2)=8x$ 于是$\vec{F}$存在势函数设为 $f(x,y)$

解 1、则 $f_x(x,y)=4x^2+8xy,\text{于是}f(x,y)=\dfrac{4}{3}x^3+4x^2y+g(y)$

$f_y(x,y)=[\dfrac{4}{3}x^3+4x^2y+g(y)]'_y=4x^2+g'(y)=3y^2+4x^2$

$g'(y)=3y^2,\text{因此}g(y)=y^3+c,\text{所以}f(x,y)=\dfrac{4}{3}x^3+4x^2y+y^3+c$

解 2、因为$\vec{F}=(4x^2+8xy,3y^2+4x^2)$是 R^2 上保守场，于是

$$\int_{(0,0)\to(x_1,y_1)}\vec{F}\bullet d\vec{r}=f(x_1,y_1)-f(0,0)$$

$$f(x_1,y_1)=\int_{(0,0)\to(x_1,y_1)}\vec{F}\bullet d\vec{r}+c=\int_{(0,0)\to(x_1,y_1)}(4x^2+8xy)dx+(3y^2+4x^2)dy$$

$$=\int_{(0,0)\to(x_1,0)}4x^2dx+\int_{(x_1,0)\to(x_1,y_1)}(3y^2+4x_1{}^2)dy+c$$

$$=\frac{4}{3}x^3\Big|_0^{x_1}+(y^3+4x_1{}^2y)\Big|_0^{y_1}+c=\frac{4}{3}x_1{}^3+y_1{}^3+4x_1{}^2y_1+c$$

$\text{所以}f(x,y)=\dfrac{4}{3}x^3+4x^2y+y^3+c$

7、设$\vec{F}=(P(x,y),Q(x,y))$则 $\int_L\vec{F}\bullet d\vec{r}=\int_L Pdx+Qdy$

当$\vec{F}=\nabla f$时，$\int_L\vec{F}\bullet d\vec{r}=f(B)-f(A)$

此时 $df=f_xdx+f_ydx=Pdx+Qdy$，于是$\int_L Pdx+Qdy=\int_L df=f(B)-f(A)$