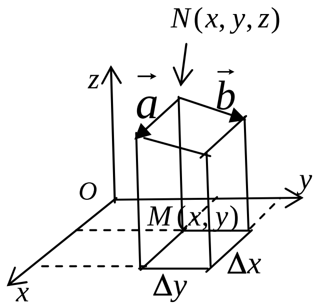
第二节、对面积的曲面积分

1、表示$\iint\limits_S f(x,y,z)dS$

2、化曲面积分为二重积分：设曲面 S 由方程 $z=z(x,\ y)$给出，曲面 S 在 xOy 面上的投影区域为 D 函数 $z=z(x,y)$在 D 上具有连续偏导数，被积函数 $f(x,y,z)$在曲面 S 上连续，则

$$\iint\limits_S f(x,y,z)dS=\iint\limits_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2(x,y)+z_y^2(x,y)}dA.$$



证：如图 $z=z(x,y)$在区域 D 上任意一点 M(x,y,) 处取增量$\Delta x,\Delta y$

曲面 S 上的对应的点 N(x,y,z)处的在 x,y 方向的相应的切向量$\vec{a}$，$\vec{b}$

$\vec{a}=<\Delta x,0,f_x(x,y)\Delta x>$，$\vec{b}=<0,\Delta y,f_y(x,y)\Delta y>$

于是曲面 S 上的小平行四边形的面积是$\vec{a}\times\vec{b}$的模

因$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \Delta x & 0 & f_x(x,y)\Delta x\\ 0 & \Delta y & f_y(x,y)\Delta y\end{vmatrix}=[-f_x(x,y)\vec{i}-f_y(x,y)\vec{j}+\vec{k}]\Delta x\Delta y$

故 $dS=\sqrt{[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2+1]}dxdy=\sqrt{[f_x(x,y)]^2+[f_y(x,y)]^2+1]}dA$

例 1 计算曲面积分$\iint\limits_S \frac{1}{z}dS$，其中 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 被平面 $z=h(0<h<a)$截出的顶部.

解：S 的方程为 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$，D: $x^2+y^2\le a^2-h^2$.

因为 $z_x=\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$，$z_y=\frac{-y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$

$$dS=\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}dxdy=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy,$$

所以 $\iint\limits_S \frac{1}{z}dS=\iint\limits_{D_{xy}}\frac{a}{a^2-x^2-y^2}dxdy=a\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{a^2-h^2}}\frac{rdr}{a^2-r^2}$

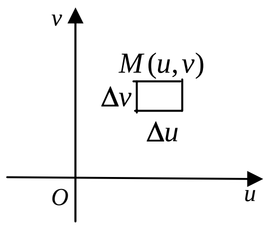
$$=2\pi a[-\frac{1}{2}\ln(a^2-r^2)]_0^{\sqrt{a^2-h^2}}=2\pi a\ln\frac{a}{h}.$$

提示：$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2-x^2-y^2}+\frac{y^2}{a^2-x^2-y^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}$.

3、用参数方程表示的曲面积分

设曲面 S 的参数方程是 $x = x(u,v)$， $y = y(u,v)$， $z = z(u,v)$， $(u,v) \in D$ 则

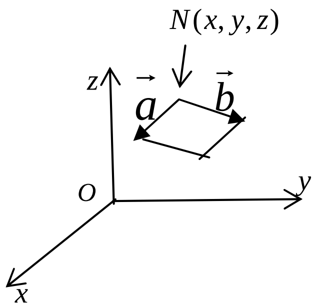
曲面 S 的方程的向量式是 $\vec{r}(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v)), (u,v) \in D.$



$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f[\vec{r}(u,v)]\,|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,dA$$

证：如图在区域 D 上任意一点 M(u,v) 处取垂直增量 $\Delta u, \Delta v$ 得一个

小矩形，设 M(u,v)在曲面 S 上的对应的点 N(x,y,z)，增量 $\Delta u, \Delta v$



分别与曲面 S 上的向量 $\vec{a}$，$\vec{b}$ 对应，则 $\vec{a} \approx \vec{r}'_u \Delta u$， $\vec{b} \approx \vec{r}'_v \Delta v$

于是曲面 S 上一个以 N 为顶点的小平行四边形的面积是 $\vec{a} \times \vec{b}$ 的模

因 $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{r}'_u \times \vec{r}'_v \Delta u \Delta v$，故 $dS = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|\,dudv = |\vec{r}'_u \times \vec{r}'_v|\,dA$

注意：要变成 u，v 则微元就得以 du，dv 为基本量。这是积分微元代换的关键。

例、计算曲面积分 $\iint_S x^2 dS$ 其中 S 是单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

用球面坐标表示 x,y,z,因 r=1

于是 $x = \sin\varphi\cos\theta, y = \sin\varphi\sin\theta, z = \cos\varphi, (0 \le \varphi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi)$

$$\vec{r}(\varphi,\theta) = (\sin\varphi\cos\theta, \sin\varphi\sin\theta, \cos\varphi).$$

$\vec{r}_\varphi = (\cos\varphi\cos\theta, \cos\varphi\sin\theta, -\sin\varphi).$， $\vec{r}_\theta = (-\sin\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\theta, 0)$

$$\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \cos\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta & -\sin\varphi \\ -\sin\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (\sin^2\varphi\cos\theta, \sin^2\varphi\sin\theta, \sin\varphi\cos\varphi)$$

于是 $|\vec{r}_\varphi \times \vec{r}_\theta| = \sqrt{\sin^4\varphi\cos^2\theta + \sin^4\varphi\sin^2\theta + \sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \sqrt{\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi} = \sin\varphi$

$$\iint_S x^2 dS = \iint_D (\sin\varphi\cos\theta)^2\,|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,dA = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\varphi\cos^2\theta\,d\varphi\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{\pi}\sin^3\varphi\,d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[1+\cos 2\theta]d\theta\int_0^{\pi}(\sin\varphi - \sin\varphi\cos^2\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}[\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta]_0^{2\pi}[-\cos\varphi + \frac{1}{3}\cos^3\varphi]_0^{\pi} = \frac{4\pi}{3}$$