一．函数方程

1．已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,对任意 $x\in\mathbf{R}$ 均有 $f(x+2)=f(x)$,且 $x\in(0,1)$ 时, $f(x)=x^2$,则 $f(-\frac{3}{2})+f(1)=$______________

2．已知函数 $f(x)$ 满足对所有的实数 x,y，都有

$$f(x)+f(2x+y)+5xy=f(3x-y)+2x^2+1$$，则 $f(10)=$_______.

3．已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：(1) $f(1)=1$，(2)当 $0<x<1$ 时， $f(x)>0$，

(3)对任意的实数 x,y 均有 $f(x+y)-f(x-y)=2f(1-x)f(y)$

则 $f(\frac{1}{3})=$______

4．设多项式 $P(x)=x^{15}-2008x^{14}+2008x^{13}-2008x^{12}+2008x^{11}-\cdots+2008x^3-2008x^2+2008x$，

则 $P(2007)=$_____.　2007

5．方程 $|x^2-3x+2|+|x^2+2x-3|$ 的实数解的个数是______

6．设函数 $f(x)=|1-2x|-3|x+1|$，如果方程 $f(x)=a$ 恰有两个不同的实数根 $u,\ v$，满足 $2\le|u-v|\le10$，则实数 a 的取值范围是__________.

7．若定义在 R 上的奇函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，且当 $0<x\le1$ 时，$f(x)=\log_3 x$，则方程 $f(x)=-\frac{1}{3}+f(0)$ 在区间（0，10）内的所有实根之和为____.

8．已知 $f(x)$ 为 R 上增函数，且对任意 $x\in R$，都有 $f\left[\ f(x)-3^x\ \right]=4$，则 $f(2)=$__________。

9．实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+\sin y=2008,\\ x+2008\cos y=2007\end{cases}(0\le y\le\frac{\pi}{2})$.则　$x+y=$_____.

10．若函数 $f(x)=\log_a(4x+\frac{a}{x})$ 在区间 $[1,2]$ 上为增函数，则 a 的取值范围是______

11．设 $a<-1$，变量 x 满足 $x^2+ax\le-x$，且 x^2+ax 的最小值为 $-\frac{1}{2}$，则 $a=$_______.

二．不等式

1．用区间表示函数 $f(x)=\ln(\frac{1-x}{x+3}-1)$ 的定义域为________________.

2．已知集合 $A=\{x\,||x-1|<2\},B=\{x\,|\log_2 x>\log_3 x\}$,则$A\cap B=$_________

3．函数 $f(x)=x^2-2x+3$，若 $|f(x)-a|<2$ 恒成立的充分条件是 $1\le x\le 2$，则实数 a 的取值范围是____________________.

4．设 $f(x)=\dfrac{1}{2x+5}+\lg\dfrac{1-x}{1+x}$，则不等式 $f\left[x(x-\dfrac{1}{2})\right]<\dfrac{1}{5}$ 的解集为__________.

5．已知实数 a 使得只有一个实数 x 满足关于 x 的不等式 $|x^2+2ax+3a|\le 2$ 则满足条件的所有的实数 a 的值是_________

6．一个直角三角形的两条直角边长为 $a,\ b$ 满足不等式 $\sqrt{a^2-6a\sqrt{2}+19}+\sqrt{b^2-4b\sqrt{3}+16}\le 3$，则这个直角三角形的斜边长为_______

7．已知集合 $A=\{\ x\mid x^2+2x-8>0\ \}$，$B=\{\ x\mid x^2-2ax+4\le 0\ \}$。若 $a>0$，且 $A\cap B$ 中恰有 1 个整数，则 a 的取值范围为__________________。

8．函数 $f(x)=2\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ 的最大值________

9．已知实数 x，y 满足 $xy+1=4x+y$，且 $x>1$，则 $(x+1)(y+2)$ 的最小值为_______________。

10．在直角坐标平面 xoy 中有点 A(5,0) .对于某个正实数 k ,存在函数 $f(x)=ax^2(a>0)$，使得 $\angle QOA=2\angle POA$，其中，$P(1,f(1)),Q(k,f(k))$．则 k 的取值范围是______

11．在平面真角坐标系中，设点 A(0,4) 、B(3,8) .若点 $P(x,0)$ 使得∠APB 最大，则 $x=$____

三。三角向量

1．函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin^2 x+\sin x\cos x-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（$x\in\left[\dfrac{\pi}{12},\dfrac{\pi}{2}\right]$）的值域为_____。

2．已知 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x+a$ 在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的最小值为-1，则 a 的最小值=____

3．函数 $f(x)=\sin^4 x+\sin x\cos x+\cos^4 x$ 的最大值是______

4．已知 $0<x<\dfrac{\pi}{2},\sin x-\cos x=\dfrac{\pi}{4}$.若 $\tan x+\dfrac{1}{\tan x}$ 可以表示成 $\dfrac{a}{b-\pi^c}$ 的形式（a,b,c 是正整数）．则 $a+b+c=$_______

5．已知向量 $\overrightarrow{OP}=(2\cos(\dfrac{\pi}{2}+x),-1),\overrightarrow{OQ}=(-\sin(\dfrac{\pi}{2}-x),\cos 2x),f(x)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$. 若 a,b,c 分别是锐角 ΔABC 中角 A,B,C 的对边，且满足 $f(A)=1,b+c=5+3\sqrt{2},a=\sqrt{13}$，则 ΔABC 的面积 $S=$____________________.

6．在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l_1: 4x+5y=20$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点Ａ、Ｂ，直线 l_2 与线段ＡＢ、ＯＡ分别交于点Ｃ、Ｄ，且平分三角形ＡＯＢ的面积，则 CD^2 的最小值为____________.

7．一个三角形的最短边长度是 1，三个角的正切值都是整数，则该三角形的最长边的长度为________

8．已知点 O 在 ΔABC 内部，且 $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=4\overrightarrow{AO}$，记 ΔABC 的面积为 S_1，ΔOBC 的面积为 S_2，则 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的值为________

9．图，PQ 是半径为 1 的圆 A 的直径，ΔABC 是边长为 1 的正三角形，则 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 的最大值为______

10. ΔABC 中，$BC=2, A=45^\circ$，B 为锐角，点 O 是 ΔABC 外接圆的圆心，则 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{BC}$ 的取值范围是__________

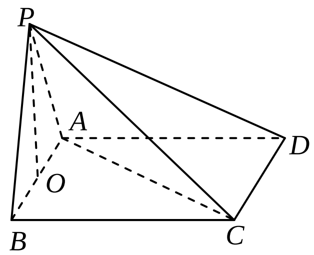
11．已知点 $A(1,-1)$，$B(4,0)$，$C(2,2)$。平面区域 D 由所有满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$（$1<\lambda\le a$，$1<\mu\le b$）的点 $P(x,y)$ 组成的区域。若区域 D 的面积为 8，则 $a+b$ 的最小值为______________。

12．已知函数 $f(x)=a_1\sin(\omega x+\varphi_1)+a_2\sin(\omega x+\varphi_2)+\cdots+a_k\sin(\omega x+\varphi_k)$，（$a_i\in\mathbf{R}$，$i=1,2,3,\cdots k$）.若 $f^2(0)+f^2(\dfrac{\pi}{2\omega})\ne 0$,且函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(\dfrac{\pi}{2},0)$ 对称,并在 $x=\pi$ 处取得最小值，则正实数 ω 的值构成的集合是__$\{\omega\,|\,\omega=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$___.

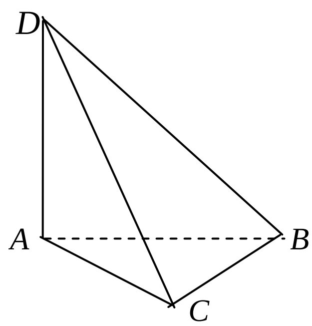
四．立几

1．已知一个正三棱柱的底面边长为 1, 且两个侧面的异面对角线互相垂直.

则它的侧棱长为________



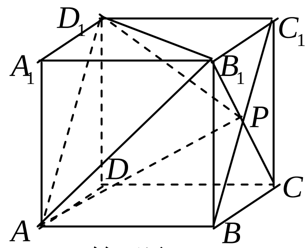
2．如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形,ΔPAB 为等边三角形,O 为 AB 边中点,且 $PO\perp$ 平面 $ABCD$，则二面角 $P-AC-D$ 的余弦值为____________.



3．如图，在四面体 $D-ABC$ 中，已知 $DA\perp$ 平面ABC，ΔABC 是边长为 2 的正三角形。则当二面角 $A-BD-C$ 的正切值为 2 时，V_{D-ABC}

4．一个直径ＡＢ＝２的半圆，过Ａ作这个圆所在平面的垂线，在垂线上取一点Ｓ，使ＡＳ＝ＡＢ，Ｃ为半圆上一个动点，Ｍ、Ｎ分别为Ａ在ＳＢ、ＳＣ上的射影. 当三棱锥Ｓ－ＡＭＮ的体积最大时，ＳＣ与平面ＡＢＣ所成角的正弦值是_______________.

5、在如图所示的棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，若点 P 是正方形 BCC_1B_1 的中心，则三棱锥 $P-AB_1D_1$ 的体积等于__________



第5题

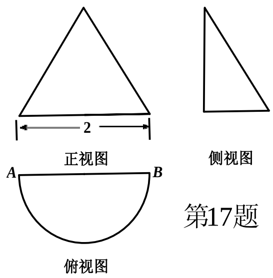
6．已知球的直径 SC=4，A，B 是该球球面上的两点，$AB=\sqrt{3}$，$\angle ASC=\angle BSC=30^\circ$，则棱锥 S—ABC 的体积为______

7．已知正三棱锥 $P-ABC$ 底面正三角形的边长为 $2\sqrt{3}$，内切球半径为 $\sqrt{2}-1$，则三棱锥的体积为________

8．在四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp$ 平面 BCD，$\triangle BCD$ 是边长为 3 的等边三角形。若 $AB=2$，则四面体 $ABCD$ 外接球的面积为________________。

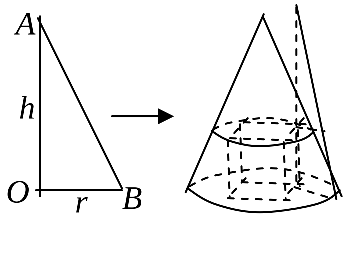
9．在四棱锥 $D-ABC$ 中，$AB=BC=2$，$AB\perp BC$，$BC\perp CD$，$DA\perp AB$，$\angle CDA=60^\circ$。则三棱锥 $D-ABC$ 的体积为_______

10．一个几何体的三视图如图所示，其中正视图是等边三角形，俯视图是半圆。现有一只蚂蚁从点 A 出发沿该几何体的侧面环绕一周回到 A 点，则蚂蚁所经过路程的最小值为________.



第17题

11、已知：ΔAOB 中，$\angle AOB=90^\circ, AO=h, OB=r.$ 如图所示，先将 ΔAOB 绕 AO 所在直线旋转一周得到一个圆锥，再在该圆锥内放置一个长宽都为 $\sqrt{2}$，高 $DD_1=1$ 的长方体 $CDEF-C_1D_1E_1F_1$。若该长方体的顶的点 C,D,E,F 都在圆锥的底面上，且顶点 C_1,D_1,E_1,F_1 都在圆锥的侧面上，则 $h+r$ 的值至少应为______



12．正三棱锥底面一个顶点与它所对侧面重心的距离为 8，则这个正三棱锥的体积的最大值为___________

一．函数方程

1．已知 $f(x)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的奇函数,对任意 $x\in\mathbf{R}$ 均有 $f(x+2)=f(x)$,且 $x\in(0,1)$ 时, $f(x)=x^2$,则 $f(-\frac{3}{2})+f(1)=$________________.$\frac{1}{4}$

解：$f(-\frac{3}{2})=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，由 $f(-1)=-f(1),f(-1)=f(1)$,得$f(1)=0$，$f(-\frac{3}{2})+f(1)=\frac{1}{4}$

2．已知函数 $f(x)$ 满足对所有的实数 x,y，都有

$f(x)+f(2x+y)+5xy=f(3x-y)+2x^2+1$，则 $f(10)=$________.

解．令 $x=10,y=5$，得 $f(10)+f(25)+250=f(25)+200+1$．因此，$f(10)=-49$

3．已知定义在 R 上的函数 $f(x)$ 满足：(1) $f(1)=1$，(2)当 $0<x<1$ 时，$f(x)>0$，(3)对任意的实数 x,y 均有 $f(x+y)-f(x-y)=2f(1-x)f(y)$

则 $f(\frac{1}{3})=$_______

解:把$x=\frac{2}{3},y=\frac{1}{3}$代入(3)得$f(1)-f(\frac{1}{3})=2f(\frac{1}{3})f(\frac{1}{3})$,由(1)得

$1-f(\frac{1}{3})=2f(\frac{1}{3})f(\frac{1}{3})$,由(2)得$f(\frac{1}{3})=\frac{1}{2}$

4．设多项式 $P(x)=x^{15}-2008x^{14}+2008x^{13}-2008x^{12}+2008x^{11}-\cdots+2008x^3-2008x^2+2008x$，则 $P(2007)=$______．　2007

解：$P(x)=(x-2007)(x^{14}-x^{13}+x^{12}-x^{11}+\cdots+x^2-x)+x$．因此，$P(2007)=2007$．

5．方程$|x^2-3x+2|+|x^2+2x-3|$的实数解的个数是_______2 个

解：设$f(x)=|x^2-3x+2|+|x^2+2x-3|=|x-1|(|x-2|+|x+3|)$

$$=\begin{cases}(x-1)(2x+1),x>2\\5(x-1),1\le x\le 2\\5(1-x),-3\le x\le 1\\(1-x)(-2x-1)=(x-1)(2x+1),x<-3\end{cases},$$

作 $y=f(x)$与$y=11$的图象得，满足方程的实数解有 2 个．

6．设函数 $f(x)=|1-2x|-3|x+1|$，如果方程 $f(x)=a$ 恰有两个不同的实数根 u,v，满足 $2\le|u-v|\le 10$，则实数 a 的取值范围是____________．**答案：**$-5\le a\le\frac{4}{3}$

解：因为 $f(x)=\begin{cases}x+4,\quad 当x<-1时,\\-5x-2,\ 当-1\le x\le\frac{1}{2}时,\\-x-4,\ 当x>\frac{1}{2}时.\end{cases}$当 a＞3 时，$f(x)=a$ 无解；当 a ＝3 时，$f(x)=a$ 只有一个解．当$-\frac{9}{2}\le a\le 3$时，直线 $y=a$ 与 $y=x+4$ 和 $y=-5x-2$ 有两个交点，故此时 $f(x)=a$ 有两个不同的解；当 $a<-\frac{9}{2}$ 时，直线 $y=a$ 与 $y=x+4$ 和 $y=-x-4$ 有两个交点，故此时 $f(x)=a$ 有两个不同的解．对于上述两种情形，分别求出它们的解 u,v，然后解不等式 $2\le|u-v|\le 10$，可得实数 a 的取值范围是$-5\le a\le\frac{4}{3}$．

7．若定义在 R 上的奇函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，且当 $0<x\le 1$ 时，$f(x)=\log_3 x$，则方程 $f(x)=-\frac{1}{3}+f(0)$ 在区间（0，10）内的所有实根之和为____．30

解：$f(x)$ 关于 $x=1$ 对称，奇函数知，$f(x+2)=f(-x)=-f(x)$，因此 $f(x+4)=-f(x+2)=f(x)$，$f(x)$ 是周期函数，4 是它的一个周期.

$f(0)=0$，方程 $f(x)=-\frac{1}{3}+f(0)$ 化为 $f(x)=-\frac{1}{3}$.

由图象可知，$f(x)=-\frac{1}{3}$ 在（0，1）、（1，2）内各有一个实根，且这两根之和为 2；$f(x)=-\frac{1}{3}$ 在（4，5）、（5, 6）内各有一个实根，且这两根之和为 10；$f(x)=-\frac{1}{3}$ 在（8，9）、（9, 10）内各有一个实根，且这两根之和为 18. 所以方程 $f(x)=-\frac{1}{3}+f(0)$ 在区间（0，10）内有 6 个不同的实根，这 6 个实根之和为 30.

8．已知 $f(x)$ 为 R 上增函数，且对任意 $x\in R$，都有 $f\left[\ f(x)-3^x\ \right]=4$，则 $f(2)=$__________。10

解： 依题意，$f(x)-3^x$ 为常数。设 $f(x)-3^x=m$，则 $f(m)=4$，$f(x)=3^x+m$。

∴ $3^m+m=4$，$3^m+m-4=0$。易知方程 $3^m+m-4=0$ 有唯一解 $m=1$。

∴ $f(x)=3^x+1$，$f(2)=3^2+1=10$。

9．实数 x,y 满足 $\begin{cases} x+\sin y=2008, \\ x+2008\cos y=2007 \end{cases}(0\le y\le\frac{\pi}{2})$.则 $x+y=$______． $2007+\frac{\pi}{2}$

解：把两个方程相减得 $\sin y=1+2008\cos y$，由 $0\le y\le\frac{\pi}{2}$，知 $1+2008\cos y\ge 1$，因此只能是 $\sin y=1,\cos y=0$． 故 $y=\frac{\pi}{2}$． 进而 $x=2007$.因此，$x+y=2007+\frac{\pi}{2}$．

10．若函数 $f(x)=\log_a(4x+\frac{a}{x})$ 在区间 $[1,2]$ 上为增函数，则 a 的取值范围是______

解：当 $a>1$ 时，则 $\frac{\sqrt{a}}{2}\le 1, a\le 4$，此时 $1<a\le 4$

当 $0<a<1$ 时，则 $\frac{\sqrt{a}}{2}\ge 1, a\ge 4$ 此时无解，综上 $1<a\le 4$

11. 设 $a<-1$，变量 x 满足 $x^2+ax\le -x$，且 x^2+ax 的最小值为 $-\frac{1}{2}$，则 $a=$________． $-\frac{3}{2}$

解：由 $a<-1$ 及 $x^2+ax\le -x$，得 $0\le x\le -(a+1)$. 设 $f(x)=x^2+ax=(x+\frac{a}{2})^2-\frac{a^2}{4}$.

若 $-\frac{a}{2}>-(a+1)$，即 $-2<a<-1$，则 $f(x)$ 在 $x=-(a+1)$ 处取最小值

$f(-a-1)=a+1$，因此 $a+1=-\frac{1}{2}, a=-\frac{3}{2}$.

若 $-\frac{a}{2}\le -(a+1)$，即 $a\le -2$，则 $f(x)$ 在 $x=-\frac{a}{2}$ 取最小值 $-\frac{a^2}{4}=-\frac{1}{2}, a=\pm\sqrt{2}$（舍去）

综上可知 $a=-\frac{3}{2}$.

二．不等式

1．用区间表示函数 $f(x)=\ln(\frac{1-x}{x+3}-1)$ 的定义域为______ $(-3,-1)$ _________.

2．已知集合 $A=\{x||x-1|<2\},B=\{x|\log_2 x>\log_3 x\},则A\bigcap B=$_________

解:$|x-1|<2\Rightarrow -1<x<3,\log_2 x>\log_3 x\Rightarrow x>1,$

$A\bigcap B=\{x|1<x<3\}$

3．函数 $f(x)=x^2-2x+3$，若 $\left|f(x)-a\right|<2$ 恒成立的充分条件是 $1\le x\le 2$，则实数 a 的取值范围是___________________．$1<a<4$

解： $\left|f(x)-a\right|<2$，$-2<f(x)-a<2$，$f(x)-2<a<f(x)+2$

由于 $1\le x\le 2$ 时，$f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$ 的最大值为 3，最小值为 2

于是 $1<a<4$

4．设 $f(x)=\frac{1}{2x+5}+\lg\frac{1-x}{1+x}$，则不等式 $f\left[x(x-\frac{1}{2})\right]<\frac{1}{5}$ 的解集为_________.

答案： $(\frac{1-\sqrt{17}}{4},0)\cup(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{17}}{4})$

解： 原不等式即为 $f\left[x(x-\frac{1}{2})\right]<f(0)$.

因为 $f(x)$ 的定义域为（－1,1），且 $f(x)$ 为减函数.

所以 $\begin{cases}-1<x-(x-\frac{1}{2})<1\\ x(x-\frac{1}{2})>0\end{cases}$. 解得 $x\in(\frac{1-\sqrt{17}}{4},0)\cup(\frac{1}{2},\frac{1+\sqrt{17}}{4})$

5．已知实数 a 使得只有一个实数 x 满足关于 x 的不等式 $|x^2+2ax+3a|\le 2$ 则满足条件的所有的实数 a 的值是_________ 1 和 2

解：欲使得不等式 $|x^2+2ax+3a|\le 2$ 只有一个解，则抛物线 $f(x)=x^2+2ax+3a$ 的图像必须与直线 $y=2$ 相切．因此，方程 $x^2+2ax+3a=2$，即 $x^2+2ax+3a-2=0$ 的判别式 $\Delta=4a^2-4(3a-2)=0$ 解得 $a=1,2$.

6．一个直角三角形的两条直角边长为 $a,\ b$ 满足不等式

$\sqrt{a^2-6a\sqrt{2}+19}+\sqrt{b^2-4b\sqrt{3}+16}\le 3$，

则这个直角三角形的斜边长为_______ $\sqrt{30}$

解： 原不等式化为 $\sqrt{(a-3\sqrt{2})^2+1}+\sqrt{(b-2\sqrt{3})^2+4}\le 3$，

而 $\sqrt{(a-3\sqrt{2})^2+1}+\sqrt{(b-2\sqrt{3})^2+4}\ge\sqrt{1}+\sqrt{4}=3$，

所以 $a=3\sqrt{2},\ b=2\sqrt{3}$．于是，斜边长为 $\sqrt{30}$.

7. 已知集合 $A=\left\{x\,\middle|\,x^2+2x-8>0\right\}$，$B=\left\{x\,\middle|\,x^2-2ax+4\le 0\right\}$。若 $a>0$，且 $A\cap B$ 中恰有 1 个整数，则 a 的取值范围为________________。$\left[\frac{13}{6},\frac{5}{2}\right)$

解：$A=\left\{x\,\middle|\,x<-4\text{ 或 }x>2\right\}$。

设 $f(x)=x^2-2ax+4$，则 $f(x)$ 的轴对称 $x=a>0$。

由 $f(-4)=16+8a+4>0$，知 $B\cap\left\{x\,\middle|\,x<-4\right\}=\phi$。

因此，$A\cap B$ 中恰有的一个整数为 3。

∴ $\begin{cases} f(3)=9-6a+4\le 0 \\ f(4)=16-8a+4>0 \end{cases}$，解得 $\frac{13}{6}\le a<\frac{5}{2}$。故，$a$ 的取值范围为 $\left[\frac{13}{6},\frac{5}{2}\right)$。

8．函数 $f(x)=2\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$ 的最大值________ $\sqrt{10}$

解：$(2\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x})^2\le(2^2+1^2)(x-3+5-x)=10$

$f(x)\le\sqrt{10}$

当且仅当 $\frac{\sqrt{x-3}}{2}=\frac{\sqrt{5-x}}{1}$ 即当 $x=\frac{23}{5}$ 时取等号，故 $f(x)$ 最大值 $\sqrt{10}$

9．已知实数 x，y 满足 $xy+1=4x+y$，且 $x>1$，则 $(x+1)(y+2)$ 的最小值为______________。 27

解：由 $xy+1=4x+y$ 知，$y=\frac{4x-1}{x-1}$。

∴ $(x+1)(y+2)=(x+1)(\frac{4x-1}{x-1}+2)=\frac{3(x+1)(2x-1)}{x-1}$。

设 $x-1=t$，则 $t>0$，

$(x+1)(y+2)=\frac{3(x+1)(2x-1)}{x-1}=\frac{3(t+2)(2t+1)}{t}=6(t+\frac{1}{t})+15\ge 27$。

当且仅当 $t=\frac{1}{t}$，即 $t=1$，$x=2$，$y=7$ 时等号成立。

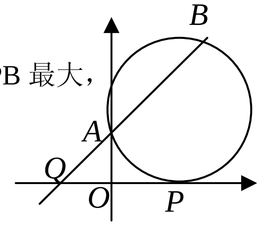
∴ $(x+1)(y+2)$ 的最小值为 27。

10．在直角坐标平面 xoy 中有点 A(5,0) .对于某个正实数 k ,存在函数 $f(x)=ax^2(a>0)$，使得 $\angle QOA=2\angle POA$，其中，$P(1,f(1)),Q(k,f(k))$．则 k 的取值范围是______ $(2,+\infty)$

解：由 $0<\angle QOA,\angle POA<\frac{\pi}{2}$ 知，$\angle QOA=2\angle POA\Leftrightarrow\tan\angle QOA=\tan 2\angle POA$，则

$\Leftrightarrow\tan\angle QOA=\tan 2\angle POA=\frac{2\tan\angle POA}{1-\tan^2\angle POA}$，结合 $\tan\angle POA=a,\tan\angle QOA=ak$，

得 $ak=\frac{2a}{1-a^2}$，即 $a=\sqrt{1-\frac{2}{k}}$，因此，$k>2$．



11．在平面真角坐标系中，设点 A(0,4) 、B(3,8) .若点 $P(x,0)$ 使得∠APB 最大，则 x =____ $5\sqrt{2}-3$

解：设∠APB=θ．易知当△ABP 的外接圆与 x 轴相切时∠APB 最大.

延长 BA 与 x 轴交于点 Q．直线 AB：$y=\frac{4}{3}x+4$，令 $y=0$ 得 $x=-3$，

$QA=5,QB=10$ 则由圆幂定理知 QP^2=QA・QB= 5×10.QP $=5\sqrt{2}$.故此时点 P 的横坐标为 $5\sqrt{2}-3$.

三．三角向量

1．函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin^2x+\sin x\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}$（$x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$）的值域为_____。$\left[-\frac{1}{2},1\right]$

解：$f(x)=\sqrt{3}\times\frac{1-\cos 2x}{2}+\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$。

由 $x\in\left[\frac{\pi}{12},\frac{\pi}{2}\right]$ 知，$-\frac{\pi}{6}\le 2x-\frac{\pi}{3}\le\frac{2\pi}{3}$，$-\frac{1}{2}\le\sin(2x-\frac{\pi}{3})\le 1$。

2．已知 $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+2\cos^2 x+a$ 在区间 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的最小值为-1，则 a 的最小值=____

解： $f(x)=\sqrt{3}\sin 2x+1+\cos 2x+a=2\sin(2x+\frac{\pi}{6})+a+1$

$x\in[0,\frac{\pi}{2}]\Rightarrow 2x+\frac{\pi}{6}\in[\frac{\pi}{6},\frac{7\pi}{6}]$，当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{7\pi}{6}$ 时， $f(x)$ 取最小值 $-1+a+1=a=-1$

3．函数 $f(x)=\sin^4 x+\sin x\cos x+\cos^4 x$ 的最大值是______

解：$f(x)=1-2\sin^2 x\cos^2 x+\sin x\cos x$

$=-\frac{1}{2}\sin^2 2x+\frac{1}{2}\sin 2x+1=-\frac{1}{2}(\sin 2x-\frac{1}{2})^2+\frac{9}{8}$

$\sin 2x=\frac{1}{2}, f(x)_{\max}=\frac{9}{8}$

4．已知 $0<x<\frac{\pi}{2},\sin x-\cos x=\frac{\pi}{4}$.若 $\tan x+\frac{1}{\tan x}$ 可以表示成 $\frac{a}{b-\pi^c}$ 的形式（a,b,c 是正整数）．则 $a+b+c=$ _______

解：由条件知 $(\sin x-\cos x)^2=(\frac{\pi}{4})^2$,因此 $\sin x\cos x=\frac{16-\pi^2}{32}$.

故 $\tan x+\frac{1}{\tan x}=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{32}{16-\pi^2}$,

所以， $a+b+c=32+16+2=50$

5．已知向量 $\overrightarrow{OP}=(2\cos(\frac{\pi}{2}+x),-1),\overrightarrow{OQ}=(-\sin(\frac{\pi}{2}-x),\cos 2x), f(x)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}$. 若 a,b,c 分别是锐角 ΔABC 中角 A,B,C 的对边，且满足 $f(A)=1,b+c=5+3\sqrt{2},a=\sqrt{13}$，则 ΔABC 的面积 $S=$___________________． $\frac{15}{2}$

解：由条件知 $f(x)=\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}=-2\cos(\frac{\pi}{2}+x)\sin(\frac{\pi}{2}-x)-\cos 2x$

$=2\sin x\cos x-\cos 2x=\sqrt{2}\sin(2x-\frac{\pi}{4})$ ． 所以 $\sqrt{2}\sin(2A-\frac{\pi}{4})=1,\sin(2A-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又因为 A 为锐角，所以 $-\frac{\pi}{4}<2A-\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}$，因此 $2A-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}$， $A=\frac{\pi}{4}$。

因为 $b+c=5+3\sqrt{2},a=\sqrt{13}$，所以

$13^2=b^2+c^2-2bc\cos A=(b+c)^2-2bc-2bc\cos A$，即

$13=43+30\sqrt{2}-(2+\sqrt{2})bc$,

所以 $bc=15\sqrt{2}$ ，△ABC 的面积 $S=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 15\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{15}{2}$.

6．在平面直角坐标系 xOy 中，直线 $l_1:4x+5y=20$ 与 x 轴、 y 轴分别交于点Ａ、Ｂ，直线 l_2 与线段ＡＢ、ＯＡ分别交于点Ｃ、Ｄ，且平分三角形ＡＯＢ的面积，则 CD^2 的最小值为___________． $5\sqrt{41}-25$

解：由条件知，OA=5,OB=4,AB= $\sqrt{41}$.设 $\angle BAO=\theta$,则 $\cos\theta=\frac{5}{\sqrt{41}}$.

由 $S_{\Delta AOB}=2S_{\Delta ACD}$，得 $AC\cdot AD=\dfrac{1}{2}AB\cdot AO=\dfrac{5\sqrt{41}}{2}$.

由余弦定理得 $CD^2=AD^2+AC^2-2\cdot AD\cdot AC\cdot\cos\theta$

$\geq 2\cdot AD\cdot AC-2\cdot AD\cdot AC\cdot\cos\theta=5\sqrt{41}-25$,

当 AD=AC 时等号成立．所以，CD^2 的最小值为 $5\sqrt{41}-25$.

7．一个三角形的最短边长度是 1，三个角的正切值都是整数，则该三角形的最长边的长度为________ $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$

解：该三角形不是直角三角形．不妨设 $A\leq B\leq C$.

则 $\tan A\leq\sqrt{3}$，又 $\tan A\in Z$，所以 $\tan A=1$.

非直角三角形中，有恒等式 $\tan A+\tan B+\tan C=\tan A\tan B\tan C$，

即 $\tan B$ 、 $\tan C$ 是方程 $1+x+y=xy$ 的一组正整数解.

所以 $\tan B$ =2， $\tan C$ =3.

易解得最长边为 $\dfrac{3\sqrt{5}}{5}$ (另外一条边长为 $\dfrac{2\sqrt{10}}{5}$).

8．已知点 O 在 ΔABC 内部，且 $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=4\overrightarrow{AO}$，记 ΔABC 的面积为 S_1，ΔOBC 的面积为 S_2，则 $\dfrac{S_1}{S_2}$ 的值为________

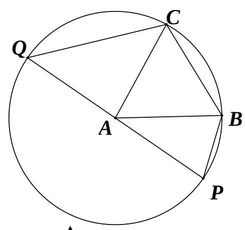
解:$3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=4\overrightarrow{AO},3\overrightarrow{AB}+2(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})-\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AO}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{AO},$设$BC$中点$D,$则$2\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO},O$是$AD$中点$,\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{1}{2}$

9．图，PQ 是半径为 1 的圆 A 的直径，ΔABC 是边长为 1 的正三角形，

则 $\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}$ 的最大值为 B

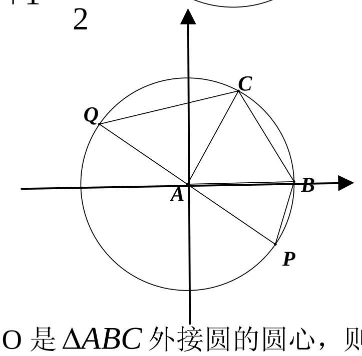
$A.\ \dfrac{1}{4}$ $B.\ \dfrac{1}{2}$ $C.\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $D.\ 1$



解1:$\overrightarrow{BP}\cdot\overrightarrow{CQ}=(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})(\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AC})$

$=\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}\bullet\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$

$=-1+\overrightarrow{AQ}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}+\overrightarrow{AQ}\bullet\overrightarrow{BC}\leq-\dfrac{1}{2}+1=\dfrac{1}{2}$



解2: 如图建系，则C$(\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$

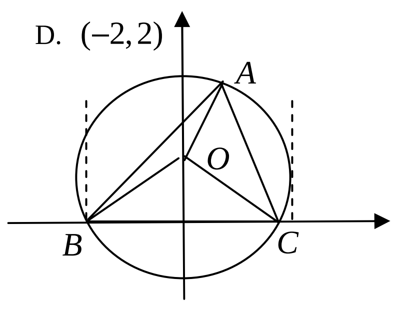
设$Q(x,y),$则$P(-x,-y)$

$\overrightarrow{BP}\bullet\overrightarrow{CQ}=(\mathrm{x}+1,\mathrm{y})\bullet(\dfrac{1}{2}-\mathrm{x},\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\mathrm{y})$

$=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{y}-\dfrac{1}{2}=\sin(\theta-\dfrac{\pi}{6})-\dfrac{1}{2}\leq\dfrac{1}{2}$

10. ΔABC 中，$BC=2,A=45^\circ$，B 为锐角，点 O 是 ΔABC 外接圆的圆心，则 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{BC}$ 的取值范围是（　A　）

A. $(-2,2\sqrt{2}]$ B. $(-2\sqrt{2},2]$ C. $[-2\sqrt{2},2\sqrt{2}]$ D. $(-2,2)$



解 2: $2R=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}=2\sqrt{2},R=\sqrt{2}$

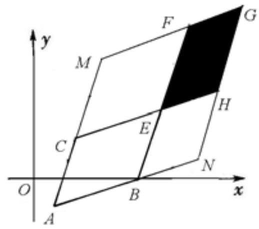
B(-1,0),C(1,0), $\overrightarrow{BC}=(2,0)$

O(0,1), ,设 A(x,y), $\overrightarrow{OA}=(\mathrm{x},y-1),\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{BC}=2\,\mathrm{x}\in(-1,\sqrt{2}]$

解 3：因 $2R=\dfrac{2}{\sin 45°}=2\sqrt{2}, R=\sqrt{2}$， 故 $\overrightarrow{OA}$ 在 $\overrightarrow{BC}$ 方向的投影的范围是 $(-1,\sqrt{2}]$

于是 $\overrightarrow{OA}\bullet\overrightarrow{BC}\in(-2,2\sqrt{2}]$

11．已知点 $A(1,-1)$，$B(4,0)$，$C(2,2)$。平面区域 D 由所有满足 $\overrightarrow{AP}=\lambda\overrightarrow{AB}+\mu\overrightarrow{AC}$（$1<\lambda\le a$，$1<\mu\le b$）的点 $P(x,y)$ 组成的区域。若区域 D 的面积为 8，则 $a+b$ 的最小值为__________。4



解：如图，延长 AB 至点 N，延长 AC 至点 M，使得 $|AN|=a|AB|$，$|AM|=b|AC|$。

四边形 $ABEC$、$ANGM$、$EHGF$ 均为平行四边形。

由条件知，点 $P(x,y)$ 组成的区域 D 为图中的阴影部分，即四边形 $EHGF$（不含边界 EH、EF）。

∵ $\overrightarrow{AB}=(3,1)$，$\overrightarrow{AC}=(1,3)$，$\overrightarrow{BC}=(-2,2)$。

∴ $|AB|=\sqrt{10}$，$|AC|=\sqrt{10}$，$|BC|=2\sqrt{2}$，$\cos\angle CAB=\dfrac{10+10-8}{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\dfrac{3}{5}$，

$\sin\angle CAB=\dfrac{4}{5}$。∴ 四边形 $EHGF$ 的面积为 $(a-1)\sqrt{10}\times(b-1)\sqrt{10}\times\dfrac{4}{5}=8$。

∴ $(a-1)(b-1)=1$，$a+b=a+(\dfrac{1}{a-1}+1)=(a-1)+\dfrac{1}{a-1}+2$。

由 $a>1$，$b>1$ 知，当且仅当 $a-1=1$，即 $a=b=2$ 时，$a+b$ 取最小值 4。

12．已知函数 $f(x)=a_1\sin(\omega x+\varphi_1)+a_2\sin(\omega x+\varphi_2)+\cdots+a_k\sin(\omega x+\varphi_k)$，（$a_i\in\mathbf{R}$，$i=1,2,3,\cdots k$）.若 $f^2(0)+f^2(\dfrac{\pi}{2\omega})\ne 0$，且函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(\dfrac{\pi}{2},0)$ 对称，并在 $x=\pi$ 处取得最小值，则正实数 ω 的值构成的集合是__$\{\omega\,|\,\omega=2n-1,n\in\mathbf{N}^*\}$___.

解：$f(x)=a_1(\sin\omega x\cos\varphi_1+\cos\omega x\sin\varphi_1)+a_2(\sin\omega x\cos\varphi_2+\cos\omega x\sin\varphi_2)$

$+\cdots+a_k(\sin\omega x\cos\varphi_k+\cos\omega x\sin\varphi_k)$

$=(a_1\cos\varphi_1+a_2\cos\varphi_2+\cdots)\sin\omega x+(a_1\sin\varphi_1+a_2\sin\varphi_2+\cdots)\cos\omega x$

$=A\sin(\omega x+\varphi)$

函数 $f(x)$ 的图像关于点 $(\dfrac{\pi}{2},0)$ 对称故 $\dfrac{\pi}{2}\omega+\varphi=k_1\pi,$

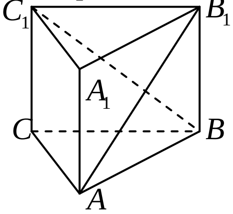
在 $x=\pi$ 处取得最小值，故 $\pi\omega+\varphi=2k_2\pi-\dfrac{\pi}{2}$

消去 φ 得 $\dfrac{\pi}{2}\omega=2k_2\pi-k_1\pi-\dfrac{\pi}{2},\omega=2(2k_2-k_1)-1=2n-1,$

四．立几

1．已知一个正三棱柱的底面边长为 1，且两个侧面的异面对角线互相垂直．则它的侧棱长为___

解：设 ABC-A$_1$B$_1$C$_1$ 是正三棱柱，侧棱的长为 a，侧面对角线 AB$_1$ 与 BC$_1$ 互相垂直．则

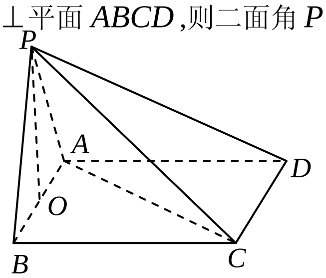


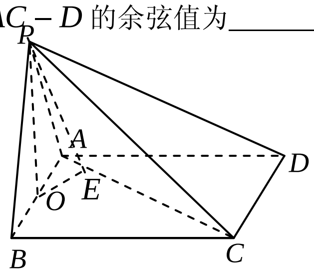
$\overrightarrow{B_1A}\cdot\overrightarrow{BC_1}=0\Rightarrow(\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BA})\cdot(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1C_1})=0$

$\Rightarrow\overrightarrow{B_1B}\cdot\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1B}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{B_1C_1}=0$

$\Rightarrow -a^2+0+0+\cos 60^\circ=0\Rightarrow a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

2．如图,在四棱锥 $P-ABCD$ 中,底面 $ABCD$ 为正方形,ΔPAB 为等边三角形,O 为 AB 边中点,且 $PO\perp$ 平面 $ABCD$,则二面角 $P-AC-D$ 的余弦值为____________.$-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

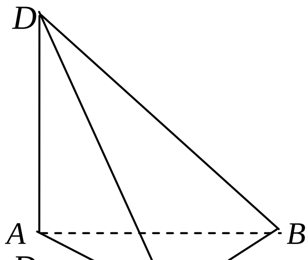


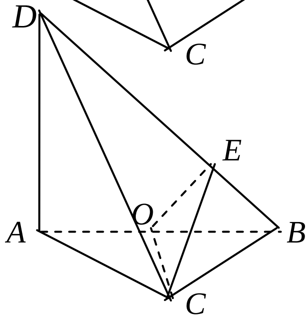


解：设边长为4，$OE=\sqrt{2},PO=2\sqrt{3},PE=\sqrt{2+12}=\sqrt{14},$

$\cos\angle PEO=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}}=\dfrac{\sqrt{7}}{7}$,所求$-\dfrac{\sqrt{7}}{7}$

3． 如图 1，在四面体 $D-ABC$ 中，已知 $DA\perp$ 平面ABC，ΔABC 是边长为 2 的正三角形。则当二面角 $A-BD-C$ 的正切值为 2 时，V_{D-ABC}





解：$OC=\sqrt{3},\dfrac{OC}{OE}=2,OE=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\angle ABD=60°$，$AD=2\sqrt{3}$，$V_{D-ABC}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{4}\times 2^2\times 2\sqrt{3}=2$

4．一个直径ＡＢ＝２的半圆，过Ａ作这个圆所在平面的垂线，在垂线上取一点Ｓ，使ＡＳ＝ＡＢ，Ｃ为半圆上一个动点，Ｍ、Ｎ分别为Ａ在ＳＢ、ＳＣ上的射影. 当三棱锥Ｓ－ＡＭＮ的体积最大时，ＳＣ与平面ＡＢＣ所成角的正弦值是______________. $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

解：易知 BC⊥面 SAC，所以 BC⊥AN，从而 AN⊥面 SBC.

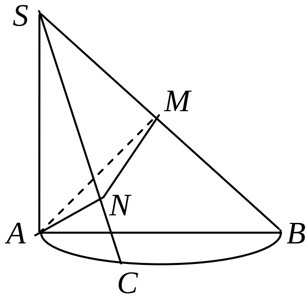
所以 AN⊥SM，因此 SM ⊥面 AMN，$V_{S-AMN}=\dfrac{1}{3}\cdot SM\cdot S_{\Delta ANM}$.

由 SA=AB=2，得 AM=SM=$\sqrt{2}$，而 AN⊥NM，

△AMN 为斜边长为 $\sqrt{2}$ 的直角三角形，面积最大在 AN=MN=1 时取到.

所以，当三棱锥 S-AMN 的体积最大时，AN=MN=1，此时，$\angle SCA=60^\circ$，

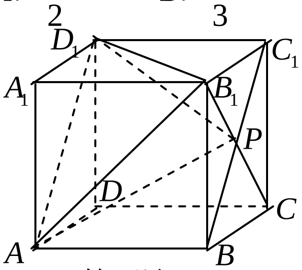
SC 与平面 ABC 所成角的正弦值是 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



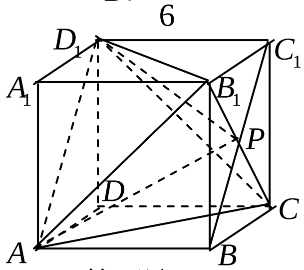
5、在如图所示的棱长为 1 的正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，

若点 P 是正方形 BCC_1B_1 的中心，则三棱锥 $P-AB_1D_1$ 的体积等于(D)

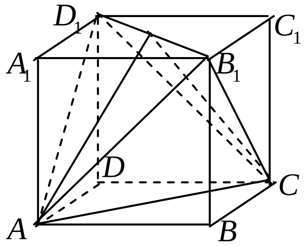
A．$\dfrac{1}{2}$　　B．$\dfrac{1}{3}$　　C．$\dfrac{1}{4}$　　D．$\dfrac{1}{6}$



第20题

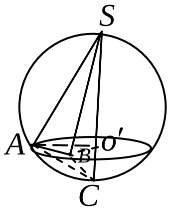


第20题

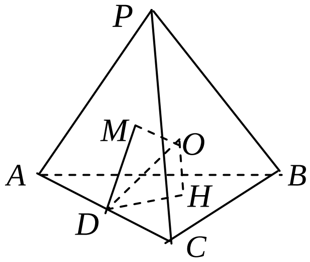


解 1：作延长面，补成正四面体　　解 2：发现$B_1P\perp$面PAD_1

6．已知球的直径 SC=4，A，B 是该球球面上的两点，AB=$\sqrt{3}$，$\angle ASC=\angle BSC=30^\circ$，则棱锥 S—ABC 的体积为_____ $2\sqrt{3}$



7．已知正三棱锥 $P-ABC$ 底面正三角形的边长为 $2\sqrt{3}$，内切球半径为 $\sqrt{2}-1$，则三棱锥的体积为________



解：$HD=\dfrac{CD}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$，$\tan\angle ODH=\sqrt{2}-1$

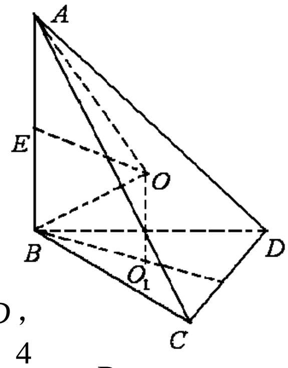
$$\tan\angle PDH=\tan 2\angle ODH=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2}=\frac{2(\sqrt{2}-1)}{2\sqrt{2}-2}=1$$

$$h=1, V_{P-ABC}=\frac{1}{3}\times 3\sqrt{3}\times 1=1$$

8．如图，在四面体 $ABCD$ 中，$AB\perp$平面 BCD，$\triangle BCD$ 是边长为 3 的等边三角形。若 $AB=2$，则四面体 $ABCD$ 外接球的面积为________________。16π

解：如图，设正 $\triangle BCD$ 的中心为 O_1，四面体 $ABCD$ 外接球的球心为 O。则

$OO_1\perp$平面 BCD，$OO_1 /\!/ AB$，$BO_1=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times 3=\sqrt{3}$。



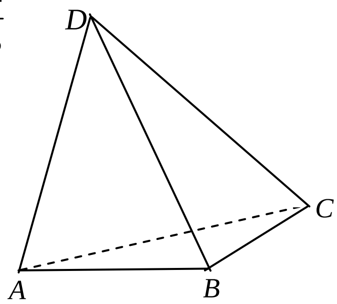
取 AB 中点 E。

由 $OA=OB$ 知，$OE\perp AB$，$OE /\!/ O_1B$，$OO_1=EB=1$。

于是，$OA=OB=2$。

∴　四面体 $ABCD$ 外接球半径为 2，其面积为 16π。

9．在四棱锥 $D-ABC$ 中，$AB=BC=2$，$AB\perp BC$，$BC\perp CD$，$DA\perp AB$，$\angle CDA=60^\circ$。则三棱锥 $D-ABC$ 的体积为_______ $\dfrac{4}{3}$



解： 如图，作 $DE\perp$面 ABC 于 E，连 EA、EC、ED。

∵　$BC\perp CD$，$DA\perp AB$，

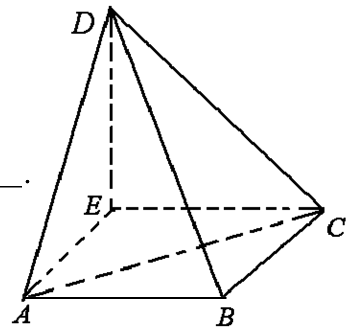
∴　$EC\perp CB$，$EA\perp AB$，四边形 $EABC$ 为矩形。

由 $AB=BC$ 知，四边形 $EABC$ 为正方形，且 $DA=DC$。

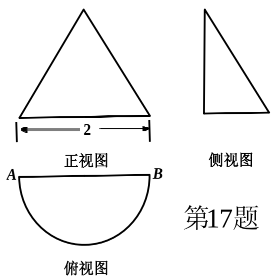
又 $\angle CDA=60^\circ$，因此，$\triangle DAC$ 为正三角形，$DA=AC$。

∴　$\sqrt{EA^2+ED^2}=\sqrt{EA^2+EC^2}$。于是，$ED=EC=2$。

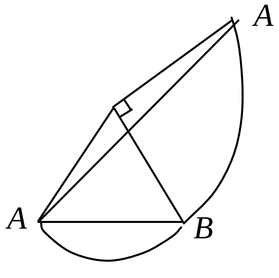
∴　三棱锥 $D-ABC$ 的体积为 $\dfrac{1}{3}\times(\dfrac{1}{2}\times 2\times 2)\times 2=\dfrac{4}{3}$。



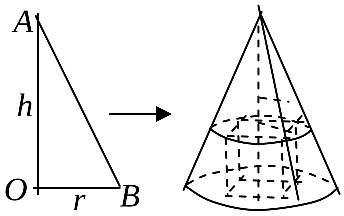
10． 一个几何体的三视图如图所示，其中正视图是等边三角形，俯视图是半圆。现有一只蚂蚁从点 A 出发沿该几何体的侧面环绕一周回到 A 点，则蚂蚁所经过路程的最小值为__ $\sqrt{2}+\sqrt{6}$（或 $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$）______.



第17题



11、已知：ΔAOB 中，$\angle AOB = 90°, AO = h, OB = r$. 如图所示，
先将 ΔAOB 绕 AO 所在直线旋转一周得到一个圆锥，再在该圆锥内放置一个长宽都为 $\sqrt{2}$，高 $DD_1 = 1$ 的长方体 $CDEF - C_1D_1E_1F_1$。
若该长方体的顶的点 C,D,E,F 都在圆锥的底面上，且顶点 C_1, D_1, E_1, F_1 都在圆锥的侧面上，则 $h + r$ 的值至少应为__4______



解：$\dfrac{1}{r} = \dfrac{h-1}{h}, h = rh - r, r + h = rh \le \dfrac{(r+h)^2}{4}, r + h \ge 4$

12．正三棱锥底面一个顶点与它所对侧面重心的距离为 8，则这个正三棱锥的体积的最大值为___________144

解：设正三棱锥 $P-ABC$ 的底面边长为 a，高为 h，
O 为三角形 ABC 的中心，G 为侧面 PBC 的重心，GH 垂直底面 ABC，垂足为 H.

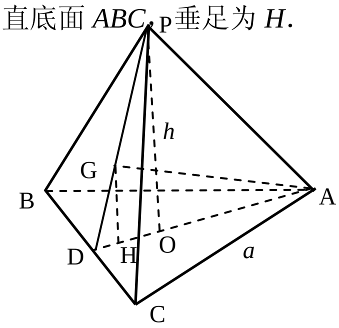
则 $GH = \dfrac{1}{3}PO = \dfrac{1}{3}h,\ \ AH = \dfrac{8}{9}AD = \dfrac{8}{9}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}a = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}a$，

由 $AH^2 + GH^2 = AG^2$ 得 $\dfrac{16}{27}a^2 + \dfrac{1}{9}h^2 = 64$，

故 $16a^2 + 3h^2 = 64\cdot 27$，

由平均不等式得

$64\cdot 27 = 8a^2 + 8a^2 + 3h^2 \ge 3\sqrt[3]{8a^2\cdot 8a^2\cdot 3h^2}$，



第 4 题答题　图

所以，$a^2h \le 576\sqrt{3}$，于是 $V_{P-ABC} = \dfrac{1}{3}S_{\Delta ABC}h = \dfrac{\sqrt{3}}{12}a^2h \le 144$.

当 $\dfrac{a}{h} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$ 时等号成立．故体积的最大值为 144.