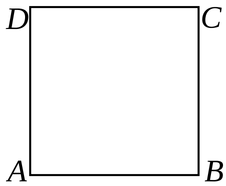
联赛练习题二

五．解几导数

1．已知F_1、F_2为双曲线C：$x^2-\frac{y^2}{24}=1$的左、右焦点，P为双曲线C上一点，且点P在第一象限。若$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{4}{3}$，则$\triangle PF_1F_2$内切圆半径为____________。

2．已知P是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$右支上异于顶点的一点，$F_1$、$F_2$分别是双曲线的左、右焦点，$M$是$\triangle PF_1F_2$的内切圆的圆心。若$S_{\triangle MPF_1}-S_{\triangle MPF_2}=\frac{1}{2}S_{\triangle MF_1F_2}$，则$\frac{b}{a}=$______。

3．在直角坐标平面上，正方形$ABCD$的顶点A、C的坐标分别为（12，19）、（3，22），则顶点B、D的坐标分别为__________________．（A、B、C、D依逆时针顺序排列）



4.已知F_1,F_2分别是双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的左、右焦点, 过$F_1$的直线$l$与双曲线的左、右两支分别交于A、B两点.若$\Delta ABF_2$是等边三角形,
则该双曲线的离心率为______

5．已知F_1、F_2分别是椭圆$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{b^2}=1$（0＜$b$＜3）的左、右焦点．若在椭圆的右准线上存在一点P，使得线段PF_1的垂直平分线过点F_2，则b的取值范围是__________.

6．若双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上横坐标为$\frac{3}{2}a$的点到右焦点的距离大于它到左准线的距离，则该双曲线两条渐近线所夹锐角的取值范围是______.

7．已知实数x,y满足$3x^2+4y^2=48$，则$\sqrt{x^2+y^2-4x+4}+\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}$的最大值=________

8、与$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$相关的代数问题可以考虑转化为
点$A(x,y)$与点$B(a,b)$的距离问题，以此观点可得方程
$|\sqrt{x^2+8x+20}-\sqrt{x^2-8x+20}|=4$的解为______

9．若关于x的方程$x^3-3x^2-9x=a$在区间$[-2,3]$上恰有两个不同的实根，则实数a的取值范围为__________

10．若a，b，c为关于x的方程$x^3-x^2-x+m=0$的三个实根，则m的最小值为____________。

11．不等式不等式$x^2+\ln x>x$的解集是_______(用区间表示)

六．数列概率

1． 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=32$， $a_{n+1}-a_n=2n$ （ $n\in N^*$ ），则 $\frac{a_n}{n}$ 的最小值为____________。

2.在数列 $\{a_n\}$ 中,已知 $a_1=2$, $a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$,则使 $a_n>10$ 成立的最小正整数 n 的值为_____________.

3. 已知 S_n,T_n 分别是等差数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的前 n 项和，且 $\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n+1}{4n-2}$,，则 $\frac{a_{10}}{b_3+b_{18}}+\frac{a_{11}}{b_6+b_{15}}=$______

4．已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1, a_{n+1}=\frac{(n+1)a_n}{2n}(n\in N^*)$,则数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为______

5．对每一个正整数 k ，设 $a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{k}$ ，则 $(3a_1+5a_2+7a_3+\cdots+99a_{49})-2500a_{49}$ 等于________

6．有五个乒乓球，其中有三个是新球，两个是旧球。每次比赛都拿其中的两个球用，用完后全部放回。设第二次比赛时取到新球的个数为 ξ ，则 ξ 的数学期望 $E\xi$ =_____18/25

7．有 14 个大小形状相同的小球，其中 7 个红球，7 个白球。它们分别装在甲、乙两个盒子内，其中甲盒子内装有 4 个红球，3 个白球，乙盒子内装有 3 个红球，4 个白球。现从甲盒子内随机摸出 1 个球放入乙盒子内，再从乙盒子内随机摸出 1 个小球放回甲盒子内，记此时、乙盒子内红球的个数为 ξ ，则 ξ 的数学期望 $E\xi$ =_____25/8

8．随机地投掷 3 粒骰子，则其中有 2 粒骰子出现的点数之和为 7 的概率为_________。

9．在正十边形的 10 个顶点中，任取 4 个点，则以这 4 个点为顶点的四边形为梯形的概率为__________________。

10．正整数 $n\le 500$ ，具有性质：从集合 $\{1,2,\cdots,500\}$ 中任取一个元素 m ，使得 $m\,|\,n$ 的概率是 $\frac{1}{100}$,则 n 的最大值是_____.

七．离散

1．数 812934756 是一个包含 1 至 9 每个数字恰好一次的九位数，它具有如下性质：数字 1 至 6 在其中是从小到大排列的，但是数字 1 至 7 不是从小到大排列的．这样的九位数共有_______个．

2．集合 $S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 的五元子集共有 21 个，每个子集的数从小到大排好后，取出中间的数，则所有这些数之和是______

3．集合｛1，2，3，⋯，2009｝的元素和为奇数的非空子集的个数为________.

4．已知集合 $A=\{x\,|\,x=a_0+a_1\times 7+a_2\times 7^2+a_3\times 7^3\}$,其中 $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$, $i=0,1,2,3$,且 $a_3\ne 0$.若正整数 $m,n\in A$,且 $m+n=2010$, $m>n$,则符合条件的正整数 m 有_____________个.

5．若三个非零且互不相等的实数a、b、c满足$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}$，则称$a$、$b$、$c$是调和的；若满足$a+c=2b$，则称$a$、$b$、$c$是等差的。已知集合$M=\{\, x \mid |\, x\,| \le 2013, x\in Z \,\}$，集合$P$是集合$M$的三元子集，即$P=\{\, a, b, c \,\}\subset M$。若集合$P$中元素$a$、$b$、$c$既是调和的，又是等差的，则称集合$P$为"好集"。则不同的"好集"的个数为____________。

6．在平面直角坐标系中，已知点集$I=\{(x,y)\,|\,x,y\text{为整数},\text{且}0\le x,y\le 5\}$。则以集合$I$中的点为顶点且位置不同的正方形的个数为_____

7．方程$100x+3y=1003$的正整数解(x,y)有________组.

8．质数p,q,r满足$p+q=r$，且$(r-p)\cdot(q-p)-27p$是一个完全平方数．则满足条件的所有三元数组（p,q,r）=______.

9．已知正整数x,y,z满足$xyz=(14-x)(14-y)(14-z)$，且$x+y+z<28$，则$x^2+y^2+z^2$的最大值为________219

10．方程$\sin\pi x=\left[\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]+\frac{1}{2}\right]$在区间$[0, 2\pi]$内的所有实根之和为________。（符号$[\, x \,]$表示不超过$x$的最大整数）。

11． $A=\left[\frac{8}{9}\right]+\left[\frac{8^2}{9}\right]+\left[\frac{8^3}{9}\right]+\cdots+\left[\frac{8^{2014}}{9}\right]$被 63 除的余数为________。（符号$[x]$表示不超过$x$的最大整数。）

12．方程$x^{[x]}=\frac{9}{2}$的实数解是________________.（其中$[x]$表示不超过x的最大整数）

八．难题

1．若对于任意的实数x，函数$f(x)=x^2-2x-|x-1-a|-|x-2|+4$的值都是非负实数，则实数$a$的最小值为________.

2．若分数$\frac{p}{q}$（p，q为正整数）化成小数为$\frac{p}{q}=0.198\cdots$，则当q取最小值时，$p+q=$________。

3．已知 5 个不同的实数，任取两个求和得到 10 个和数，其中最小的三个和数依次为 32、36、37，最大的两个和数为 48 和 51，则这 5 个数中最大的数等于____.

4．满足$0\le k_i\le 20, i=1,2,\cdots,20$，且$k_1+k_3=k_2+k_4$的有序整数组$(k_1,k_2,k_3,k_4)$的个数为______.

5．已知集合A的元素都是整数，其中最小的为 1，最大的为 200。且除 1 以外，A中每一个数都等于A中某两个数（可以相同）的和。则$|A|$的最小值为________。（符号$|A|$表示集合A中元素的个数）

6．对正数x，记$m=[\frac{x}{2}]+[\frac{x}{2^2}]+[\frac{x}{2^3}]+\cdots+[\frac{x}{2^k}]$，其中 k 为满足$2^k\ge x$有最小整数，符号$[x]$表示不超过$x$的最大整数，$x$与$m$的差，即$x-m$称为正整数$x$的“亏损数”。（如$x=100$时$m=[\frac{100}{2}]+[\frac{100}{2^2}]+[\frac{100}{2^3}]+[\frac{100}{2^4}]+[\frac{100}{2^5}]+[\frac{100}{2^6}]+[\frac{100}{2^7}]=50+25+12+6+3+1+0=97$

$x-m=100-97=3$，因此数 100 的“亏损数”为 3。）则“亏损数”为 9 的最小正整数x为________

7．已知函数$f(x)=\begin{cases} x，若 x 为无理数 \\ \frac{q+1}{p}, 若 x=\frac{q}{p}, 其中 p, q\in N^*, 且 p、q 互质, p>q \end{cases}$，则函数$f(x)$在区间$(\frac{7}{8},\frac{8}{9})$上的最大值为________。

练习题二答案

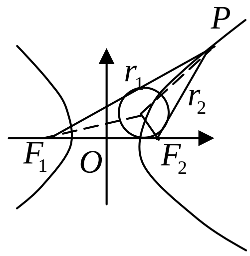
五．解几导数

1．已知 F_1、F_2 为双曲线 C：$x^2-\frac{y^2}{24}=1$ 的左、右焦点，P 为双曲线 C 上一点，且点 P 在第一象限。若 $\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{4}{3}$，则 $\triangle PF_1F_2$ 内切圆半径为____________。

解：设 $|PF_1|=4t$，则 $|PF_2|=3t$，$4t-3t=|PF_1|-|PF_2|=2$。

于是，$t=2$，$|PF_1|=8$，$|PF_2|=6$，结合 $|F_1F_2|=10$ 知，$\triangle PF_1F_2$ 为直角三角形，$PF_1\perp PF_2$。∴ $\triangle PF_1F_2$ 内切圆半径 $r=\frac{6+8-10}{2}=2$。

2．已知 P 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 右支上异于顶点的一点，F_1、F_2 分别是双曲线的左、右焦点，M 是 $\triangle PF_1F_2$ 的内切圆的圆心。若 $S_{\triangle MPF_1}-S_{\triangle MPF_2}=\frac{1}{2}S_{\triangle MF_1F_2}$，则 $\frac{b}{a}=\underline{\sqrt{3}}$。

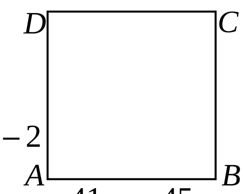


解：$S_{\triangle MPF_1}-S_{\triangle MPF_2}=\frac{1}{2}S_{\triangle MF_1F_2}$

$$\frac{1}{2}r_1r-\frac{1}{2}r_2r=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{2}\times 2cr),r_1-r_2=2c,2a=c,b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3}a,\frac{b}{a}=\sqrt{3}$$

3．在直角坐标平面上，正方形 $ABCD$ 的顶点 A、C 的坐标分别为（12，19）、（3，22），则顶点 B、D 的坐标分别为________________．（A、B、C、D 依逆时针顺序排列）

答案：（9，25）、（6，16）



解：设线段 AC 的中点为 M，则点 M 的坐标为 $(\frac{15}{2},\frac{41}{2})$，

$K_{AC}=\frac{3}{-9}=-\frac{1}{3},K_{BD}=3$，直线 BD：$y-\frac{41}{2}=3(x-\frac{15}{2}),y=3x-2$

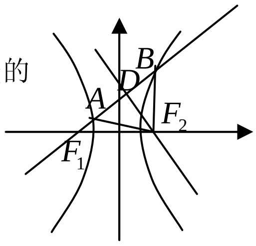
$AC=\sqrt{9^2+3^2}=3\sqrt{10}$，圆 $AC=\sqrt{9^2+3^2}=3\sqrt{10}$，$(x-\frac{15}{2})^2+(y-\frac{41}{2})^2=\frac{45}{2}$

$(x-\frac{15}{2})^2+(3x-\frac{45}{2})^2=\frac{45}{2},10(x-\frac{15}{2})^2=\frac{45}{2},(x-\frac{15}{2})^2=\frac{9}{4}$

$x=6或x=9$

注：用边长为 $3\sqrt{5}$ 也可，$(x-3)^2+(y-22)^2=45$

4. 已知F₁,F₂分别是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右焦点, 过 F₁ 的直线 l 与双曲线的左、右两支分别交于 A、B 两点.若 ΔABF₂ 是等边三角形, 则该双曲线的离心率为_______答 $\sqrt{7}$



解：设 $|AB|=|BF_2|=|AF_2|=t$，$|AF_1|=2a,t=|AF_2|=|AF_1|+2a=4a$

$|BF_1|=6a$，$4c^2=36a^2+16a^2-24a^2=28a^2,c^2=7a^2,e=\sqrt{7}$

5．已知F_1、F_2分别是椭圆$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$（0＜$b$＜3）的左、右焦点．若在椭圆的右准线上存在一点 P，使得线段PF_1的垂直平分线过点F_2，则b的取值范围是__________.

答案：$(0,\ \sqrt{6})$

解：线段PF_1的垂直平分线过点F_2，等价于$|F_2P|=|F_1F_2|$．设椭圆的右准线$x=\dfrac{9}{c}$交x轴于点K，则在椭圆的右准线上存在一点 P，使得$|F_2P|=|F_1F_2|$，等价于$|F_2K|\le|F_1F_2|$.

所以$\dfrac{9}{c}-c\le 2c$，$c^2\ge 3$．因此$b^2=a^2-c^2=9-c^2\le 6$，故b的取值范围是$(0,\ \sqrt{6}\ ]$.

6．若双曲线$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上横坐标为$\dfrac{3}{2}a$的点到右焦点的距离大于它到左准线的距离，则该双曲线两条渐近线所夹锐角的取值范围是______．$(0^\circ,60^\circ)$

解：双曲线上横坐标为$\dfrac{3}{2}a$的点到右焦点的距离为$e|\dfrac{3}{2}a-\dfrac{a^2}{c}|$，到左准线的距离为$|\dfrac{3}{2}a-(-\dfrac{a^2}{c})|$．由条件知$e|\dfrac{3}{2}a-\dfrac{a^2}{c}|>|\dfrac{3}{2}a-(-\dfrac{a^2}{c})|$．整理得$|\dfrac{3}{2}e-1|>|\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{e}|$，结合$e>1$，解得$e>2$．故$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}>2$，即$\dfrac{b}{a}>\sqrt{3}$.

因此，双曲线两条渐近线所夹锐角的取值范围是$(0^\circ,60^\circ)$.

7．已知实数x,y满足$3x^2+4y^2=48$，则$\sqrt{x^2+y^2-4x+4}+\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}$的最大值=________$8+\sqrt{13}$

解：设点$P(x,y)$在椭圆$\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{12}=1$上，$A(2,0)$为右焦点，$B(1,-2)$在椭圆内

$$\sqrt{x^2+y^2-4x+4}+\sqrt{x^2+y^2-2x+4y+5}$$

$$=\sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2}$$

$$=|PF_2|+|PB|=8+|PB|-|PF_1|\le 8+|BF_1|=\sqrt{13}$$

8、与$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}$相关的代数问题可以考虑转化为点$A(x,y)$与点$B(a,b)$的距离问题，以此观点可得方程

$|\sqrt{x^2+8x+20}-\sqrt{x^2-8x+20}|=4$的解为_$\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$_____

解：$|\sqrt{x^2+8x+20}-\sqrt{x^2-8x+20}|=4$，$|\sqrt{(x+4)^2+2^2}-\sqrt{(x+4)^2+2^2}|=4$

设$|\sqrt{(x+4)^2+2^2}-\sqrt{(x+4)^2+2^2}|=4$

$\mathrm{P}(x,2),\mathrm{F}_1(-4,0),\mathrm{F}_2(4,0)$,于是$||PF_1|-|PF_2||=4$

于是$\mathrm{P}(x,2)$在$\mathrm{F}_1,\mathrm{F}_2$为焦点的双曲线上，$a=2,c=4,b^2=12$

双曲线：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$,令$y=2$,$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{3}=1$，$x=\pm\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

9．若关于 x 的方程$x^3-3x^2-9x=a$在区间$[-2,3]$上恰有两个不同的实根，则实数a的取值范围为__________$[-2,5)$

解：$f(x)=x^3-3x^2-9x,\ f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x-3)(x+1)$

在$[-2,-1)$上$f(x)$递增，在$(-1,3]$上$f(x)$递减，
又$f(-2)=-2, f(-1)=5, f(3)=-27$，作图象得$-2\le a<5$

10．若a，b，c为关于x的方程$x^3-x^2-x+m=0$的三个实根，则m的最小值为__________。 $-\frac{5}{27}$

解：$f(x)=x^3-x^2-x+m, f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$

$f(x)_{极大}=f(-\frac{1}{3})=-\frac{1}{27}-\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+m=m+\frac{5}{27}>0$

$f(x)_{极小}=f(1)=1-1-1+m=m-1<0$

$\therefore -\frac{5}{27}\le m\le 1 \therefore m有最小值-\frac{5}{27}$

7. 函 数 $f(x)=\sin^{2k}x+\cos^{2k}x$ $(k\in\mathbf{N}^*)$的最小值________________. $\frac{1}{2^{k-1}}$

解：$设t=\sin^2 x\in[0,1],则f(x)化为g(t)=t^k+(1-t)^k$

$当k=1时, g(t)=1$

$当k\ge 2时, g'(t)=kt^{k-1}-k(1-t)^{k-1}=k[t^{k-1}-(1-t)^{k-1}]$

$由g'(t)=0得t=\frac{1}{2},$

$在[0,\frac{1}{2})上g'(t)<0, g(t)递减, 在(\frac{1}{2},1]上g'(t)>0, g(t)递增$

$f(x)_{\min}=g(\frac{1}{2})=(\frac{1}{2})^k+(\frac{1}{2})^k=\frac{1}{2^{k-1}}对k=1也适用$

11．不等式不等式$x^2+\ln x>x$的解集是_______(用区间表示)

解：设$f(x)=x^2+\ln x-x$，则$f'(x)=2x+\frac{1}{x}-1=\frac{2x^2-x+1}{x}>0$，

于是$(0,+\infty)$上$f(x)$递增，又$f(1)=0$，故$f(x)>0的解集是(1,+\infty)$

12．对于函数$y=f(x)$，$x\in D$，若对任意的$x_1\in D$，存在唯一的$x_2\in D$，使得$\sqrt{f(x_1)f(x_2)}=M$，则称函数$f(x)$在D上的几何平均数为M。已知$f(x)=x^3-x^2+1$，$x\in\left[1,2\right]$，则函数$f(x)=x^3-x^2+1$在$\left[1,2\right]$上的几何平均数$M=$____________。$\sqrt{5}$

解：∵ 当$1<x<2$时，$f'(x)=3x^2-2x=x(3x-2)>0$，

∴ $f(x)=x^3-x^2+1$在区间$\left[1,2\right]$上为增函数，其值域为$\left[1,5\right]$。

∴ 根据函数$f(x)$几何平均数的定义知，$M=\sqrt{5}$。

六．数列概率

1．已知数列$\left\{a_n\right\}$满足$a_1=32$，$a_{n+1}-a_n=2n$（$n\in N^*$），则$\dfrac{a_n}{n}$的最小值为___________。 $\dfrac{31}{3}$

解：由$a_1=32$，$a_{n+1}-a_n=2n$知，

$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$

$=2(n-1)+2(n-2)+\cdots+2\times1+32=n(n-1)+32$

∴ $\dfrac{a_n}{n}=n-1+\dfrac{32}{n}$，又$n=5$时，$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{52}{5}$；$n=6$时，$\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{31}{3}$。

∴ $n=6$时，$\dfrac{a_n}{n}$取最小值$\dfrac{31}{3}$。

2.在数列$\left\{a_n\right\}$中,已知$a_1=2$,$a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$,则使$a_n>10$成立的最小正整数$n$的值为_____________.3

解：$a_{n+1}-2a_n=2^{n+1}\Rightarrow\dfrac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\dfrac{a_n}{2^n}=1,\dfrac{a_1}{2^1}=1$

$\dfrac{a_n}{2^n}=n,a_n=n2^n>10,n\geq3$

3.已知S_n,T_n分别是等差数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$的前 n 项和，且$\dfrac{S_n}{T_n}=\dfrac{2n+1}{4n-2}$,，则$\dfrac{a_{10}}{b_3+b_{18}}+\dfrac{a_{11}}{b_6+b_{15}}=$______

解:$\dfrac{a_{10}}{b_3+b_{18}}+\dfrac{a_{11}}{b_6+b_{15}}=\dfrac{a_{10}}{b_1+b_{20}}+\dfrac{a_{11}}{b_1+b_{20}}=\dfrac{a_{10}+a_{11}}{b_1+b_{20}}=\dfrac{a_1+a_{20}}{b_1+b_{20}}$

$=\dfrac{S_{20}}{T_{20}}=\dfrac{2\times20+1}{4\times20-2}=\dfrac{41}{78}.$

4．已知数列$\{a_n\}$中, $a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{(n+1)a_n}{2n}(n\in N^*)$,则数列$\{a_n\}$的前$n$项和为______

解:$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{(n+1)}{2n}(n\in N^*)$,

当$n\geq2$时, $a_n=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\bullet\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\bullet\cdots\bullet\dfrac{a_2}{a_1}\bullet a_1=\dfrac{n}{2(n-1)}\times\dfrac{(n-1)}{2(n-2)}\times\cdots\times\dfrac{2}{2\times1}\times1=\dfrac{n}{2^{n-1}}$

$a_1=1$也适合, 故$a_n=\dfrac{n}{2^{n-1}}$

$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=1+\dfrac{2}{2}+\dfrac{3}{2^2}+\dfrac{4}{2^3}\cdots+\dfrac{n}{2^{n-1}}$

$\dfrac{1}{2}S_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2^2}+\dfrac{3}{2^3}+\dfrac{4}{2^4}\cdots+\dfrac{n}{2^n}$

$\therefore\dfrac{1}{2}S_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{2^3}+\cdots+\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{n}{2^n}=\dfrac{1-\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2}}-\dfrac{n}{2^n}=2-\dfrac{n+2}{2^n}$

$S_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$

5．对每一个正整数k，设$a_k=1+\frac{1}{2}+\cdots\frac{1}{k}$，则

$(3a_1+5a_2+7a_3+\cdots+99a_{49})-2500a_{49}$

等于________－1225

解： $(3a_1+5a_2+7a_3+\cdots+99a_{49})-2500a_{49}$

$$=(3+5+\cdots+99)\times1+(5+7+\cdots+99)\times\frac{1}{2}+(7+9+\cdots+99)\times\frac{1}{3}+\cdots+99\times\frac{1}{49}-2500a_{49}$$

$$=(50^2-1^2)\times1+(50^2-2^2)\times\frac{1}{2}+\cdots+(50^2-49^2)\times\frac{1}{49}-2500a_{49}$$

$$=50^2(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{49})-(1+2+\cdots49)-2500a_{49}$$

$$=-(1+2+\cdots+49)=-1225.$$

概率

6．有五个乒乓球，其中有三个是新球，两个是旧球。每次比赛都拿其中的两个球用，用完后全部放回。设第二次比赛时取到新球的个数为ξ，则ξ的数学期望$E\xi$ =_____18/25

解：ξ的值有 0，1，2

$$P(\xi=0)=\frac{C_2^2}{C_5^2}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}+\frac{C_3^2}{C_5^2}\times\frac{C_4^2}{C_5^2}=\frac{1+18+18}{100}=\frac{37}{100}$$

$$P(\xi=1)=\frac{C_2^2}{C_5^2}\times\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}+\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\times\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2}+\frac{C_3^2}{C_5^2}\times\frac{C_4^1}{C_5^2}=\frac{6+36+12}{100}=\frac{54}{100}$$

$$P(\xi=2)=\frac{C_2^2}{C_5^2}\times\frac{C_3^2}{C_5^2}+\frac{C_3^1C_2^1}{C_5^2}\times\frac{C_2^2}{C_5^2}=\frac{3+6}{100}=\frac{9}{100}$$

于是$E\xi=0\times\frac{37}{100}+1\times\frac{54}{100}+2\times\frac{9}{100}=\frac{72}{100}=\frac{18}{25}$

7．有 14 个大小形状相同的小球，其中 7 个红球，7 个白球。它们分别装在甲、乙两个盒子内，其中甲盒子内装有 4 个红球，3 个白球，乙盒子内装有 3 个红球，4 个白球。现从甲盒子内随机摸出 1 个球放入乙盒子内，再从乙盒子内随机摸出 1 个小球放回甲盒子内，记此时、乙盒子内红球的个数为ξ，则ξ的数学期望$E\xi$ =_____25/8

解：ξ的值有 2，3，4

$$P(\xi=2)=\frac{3}{7}\times\frac{3}{8}=\frac{9}{56},P(\xi=4)=\frac{4}{7}\times\frac{4}{8}=\frac{16}{56},P(\xi=3)=1-\frac{9}{56}-\frac{16}{56}=\frac{31}{56}$$

$$E\xi=2\times\frac{9}{56}+3\times\frac{31}{56}+4\times\frac{16}{56}=\frac{175}{56}=\frac{25}{7}$$

8．随机地投掷 3 粒骰子，则其中有 2 粒骰子出现的点数之和为 7 的概率为________。$\frac{5}{12}$

解：投掷 3 粒骰子共有$6^3=216$种可能。考虑$7=1+6=2+5=3+4$。

投掷三粒骰子，有两粒骰子出现 1 和 6 的可能有$6\times6-6=30$（种）。

（分为$(1,6,\times)$，$(1,\times,6)$，$(6,1,\times)$，$(6,\times,1)$，$(\times,1,6)$，$(\times,6,1)$这 6 种可能，每类有 6 种情况。其中，$(1,6,1)$，$(1,6,6)$，$(1,1,6)$，$(6,1,1)$，$(6,1,6)$，$(6,6,1)$重复出现）

同理，投掷三粒骰子，有两粒骰子出现 2 和 5 的可能与有两粒骰子出现 3 和 4 的可能均为 30 种。

∴ 投掷 3 粒骰子，其中有 2 粒骰子出现的点数之和为 7 的有$3\times30=90$种可能。

∴ 所求概率为$\frac{90}{216}=\frac{5}{12}$。

9．在正十边形的 10 个顶点中，任取 4 个点，则以这 4 个点为顶点的四边形为梯形的概率为________________。$\frac{2}{7}$

解：设正十边形为$A_1A_2\cdots A_{10}$。则

以A_1A_2为底边的梯形有$A_1A_2A_3A_{10}$、$A_1A_2A_4A_9$、$A_1A_2A_5A_8$共 3 个。同理分别以A_2A_3、A_3A_4、A_4A_5、…、A_9A_{10}、$A_{10}A_1$为底边的梯形各有 3 个。这样，合计有 30 个梯形。

以A_1A_3为底边的梯形有$A_1A_3A_4A_{10}$、$A_1A_3A_5A_9$共 2 个。同理分别以A_2A_4、A_3A_5、A_4A_6、…、A_9A_1、$A_{10}A_2$为底边的梯形各有 2 个。这样，合计有 20 个梯形。

以A_1A_4为底边的梯形只有$A_1A_4A_5A_{10}$ 1 个。同理分别以A_2A_5、A_3A_6、A_4A_7、…、A_9A_2、$A_{10}A_3$为底边的梯形各有 1 个。这样，合计有 10 个梯形。

所以，所求的概率$P=\frac{30+20+10}{C_{10}^4}=\frac{2}{7}$。

10．正整数$n\le500$，具有性质：从集合$\{1,2,\cdots,500\}$中任取一个元素m，使得$m\mid n$的概率是$\frac{1}{100}$,则n的最大值是_____.

解：由题设知n恰有 5 个正约数．设n的质因数分解是$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_k^{\alpha_k}$．则$n$的正约数个数为$(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_k+1)=5$．因此，$n$具有$p^4$（$p$为质数）的形式．由于$3^4=81,5^4=625>500$,故$n$的最大值为 81.

七．离散

1．数 812934756 是一个包含 1 至 9 每个数字恰好一次的九位数，它具有如下性质：数字 1 至 6 在其中是从小到大排列的，但是数字 1 至 7 不是从小到大排列的．这样的九位数共有_______个．432

解：在 1，2，3，4，5，6 中插入 7，有 6 种放法，然后插入 8 和 9，分别有 8 种和 9 种放法，所以，共有 $6\times8\times9=432$ 个满足性质的九位数．

解：在 1，2，3，4，5，6 中插入 7，有 6 种放法，

插入 8 和 9，$6\times A_8^2+6\times8A_2^2=432$

2．集合 $S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$的五元子集共有 21 个，每个子集的数从小到大排好后，取出中间的数，则所有这些数之和是______84

解：显然中间数只能是 3，4，5．

以 3 为中间数的子集有 C_4^2 个，以 4 为中间数的子集有 $C_3^2\times C_3^2$ 个，以 5 为中间数的子集有 C_4^2 个．

所以，这些中间数的和为 $3\times C_4^2+4\times C_3^2\times C_3^2+5\times C_4^2=84$．

另解：对某个子集 A，用 8－ A 表示 A 中每个元素被 8 减所得的集合，这个集合也是一个满足要求的 5 元子集．这是一个 1－1 对应．且这两个集合中中间数之和为 8，平均为 4．

故所有的中间数的和为 $21\times4=84$．

3．集合｛1，2，3，…，2009｝的元素和为奇数的非空子集的个数为________． 2^{2008}

解：方法 1：令 $f(x)=(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdots(1+x^{2009})$，则问题中要求的答案为 $f(x)$ 的展开式中 x 的奇次项的系数和。故所求的答案为

$$\frac{f(1)-f(-1)}{2}=\frac{2^{2009}-0}{2}=2^{2008}.$$

方法 2：对集合｛1,2,3，…，2009｝的不含 2009 的子集 A 讨论，若 A 的各数之和为偶数则补入 2009，否则不补，故共有 2^{2008} 个元素和为奇数的非空子集.

4．已知集合 $A=\{x\mid x=a_0+a_1\times7+a_2\times7^2+a_3\times7^3\}$,其中 $a_i\in\{0,1,2,3,4,5,6\}$, $i=0,1,2,3$,且 $a_3\neq0$.若正整数 $m,n\in A$,且 $m+n=2010$, $m>n$,则符合条件的正整数 m 有____________个. 662

解：$m,n\in A$，$a_3\neq0$，于是 $m,n\geq1000_{(7)}=343$

(2010-342×2)/2=663，$m>n$，故答案是 662

5．若三个非零且互不相等的实数 a、b、c 满足 $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}$，则称 a、b、c 是调和的；若满足 $a+c=2b$，则称 a、b、c 是等差的。已知集合 $M=\{\,x\,|\,|x|\leq2013,x\in Z\,\}$，集合 P 是集合 M 的三元子集，即 $P=\{\,a,b,c\,\}\subset M$。若集合 P 中元素 a、b、c 既是调和的，又是等差的，则称集合 P 为“好集”。则不同的“好集”的个数为____________。1006

解：若 a、b、c 既是调和的，又是等差的，则 $\begin{cases}\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{c}\\ a+c=2b\end{cases}$，$a=-2b$，$c=4b$。

即“好集”为形如$\{\,-2b,b,4b\,\}$（$b\neq0$）的集合。

由“好集”是集合 M 的三元子集知，$-2013\leq4b\leq2013$，$b\in Z$，且 $b\neq0$。

∴ $-503\leq b\leq503$，$b\in Z$，且 $b\neq0$。符合条件的 b 可取 1006 个值。

∴ “好集”的个数为 1006。

6．在平面直角坐标系中，已知点集 $I=\{(x,y)\,|\,x,y为整数,且0\le x,y\le 5\}$。则以集合 I 中的点为顶点且位置不同的正方形的个数为_____105

解：满足条件的正方形有两类，一类是以坐标轴方向为边的。另一类是其它

以坐标轴方向为边的正方形，若边长为 $k(k=1,2,3,4,5)$，则有 $(6-k)^2$ 个

其它的正方形，是上述正方形的内接正方形，边长为 k 的正方形有 k-1 个内接正方形，

综上，符合条件的正方形的个数是 $\sum_{k=1}^{5}[(6-k)^2+(6-k)^2(k-1)]=105$

7．方程 $100x+3y=1003$ 的正整数解 (x,y) 有________组．

答案：4

解：$100x+3y=1003\Rightarrow 100x<1003, x<10.03, x\le 10$

两边模 3，知 $x\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$，所以，$x$＝1，4，7，10，

对应的 y 分别为 301，201，101，1．

故满足方程的正整数解有 4 组．

8．质数 p,q,r 满足 $p+q=r$，且 $(r-p)\cdot(q-p)-27p$ 是一个完全平方数．则满足条件的所有三元数组（p,q,r）=______.

11. $(2, 29, 31)$．由题设知 $p<q<r$，

由 $p+q=r$，p,q,r 是质数，两边模 2，$p\equiv 0(\mathrm{mod}\,2)$，

知 $p=2$ 故 $q=r-2$.于是，

$(r-p)\cdot(q-p)-27p=(q-1)^2-55$．设 $(q-1)^2-55=n^2$（n 为正整数）.

则 $(q-1-n)(q-1+n)=55$ 解得 $(q,n)=(29,27)$ 或(9,3)(舍去).

因此，（p,q,r）=（2, 29, 31）.

9．已知正整数 x,y,z 满足 $xyz=(14-x)(14-y)(14-z)$，且 $x+y+z<28$，则 $x^2+y^2+z^2$ 的最大值为________219

解：由题意得 $0<x,y,z<14$

把 $xyz=(14-x)(14-y)(14-z)$ 展开得

$2xyz=14^3-14^2(x+y+z)+14(xy+yz+zx)$，故 $7\,|\,xyz$

故 x,y,z 至少一个为 7，不妨设 $z=7$。则 $xyz=(14-x)(14-y)(14-z)$

化为 $xy=(14-x)(14-y)\Rightarrow x+y=14, x^2+y^2=x^2+(14-x)^2=2x^2-28x+196$

$x=1或13$ 时 $x^2+y^2最大=1^2+13^2=170$，$x^2+y^2+z^2=170+49=219$

10．方程$\sin\pi x=\left[\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]+\frac{1}{2}\right]$在区间$[0,2\pi]$内的所有实根之和为________。

（符号$[x]$表示不超过x的最大整数）。**答：**12

解：设$\left\{\frac{x}{2}\right\}=\frac{x}{2}-\left[\frac{x}{2}\right]$，则对任意实数$x$，$0\le\left\{\frac{x}{2}\right\}<1$。

原方程化为$\sin\pi x=\left[\left\{\frac{x}{2}\right\}+\frac{1}{2}\right]$。

① 若$0\le\left\{\frac{x}{2}\right\}<\frac{1}{2}$，则$\sin\pi x=\left[\left\{\frac{x}{2}\right\}+\frac{1}{2}\right]=0$，$\pi x=k\pi$（$k\in Z$）。

∴ $x=k$（$k\in Z$）。结合$x\in[0,2\pi]$知，$x=0$，1，2，3，4，5，6。

经检验，$x=0$，2，4，6 符合要求。

② 若$\frac{1}{2}\le\left\{\frac{x}{2}\right\}<1$，则$\sin\pi x=\left[\left\{\frac{x}{2}\right\}+\frac{1}{2}\right]=1$，$\pi x=2k\pi+\frac{1}{2}\pi$（$k\in Z$）。

∴ $x=2k+\frac{1}{2}$（$k\in Z$）。结合$x\in[0,2\pi]$知，$x=\frac{1}{2}$，$\frac{5}{2}$，$\frac{9}{2}$。

经检验，$x=\frac{1}{2}$，$\frac{5}{2}$，$\frac{9}{2}$均不符合要求。

∴ 符合条件的x为 0，2，4，6，它们的和为 12。

11． $A=\left[\frac{8}{9}\right]+\left[\frac{8^2}{9}\right]+\left[\frac{8^3}{9}\right]+\cdots+\left[\frac{8^{2014}}{9}\right]$被 63 除的余数为________。（符号$[x]$表示不超过$x$的最大整数。）**答：** 56

解：∵ 对任意正整数k，$\frac{8^{2k-1}}{9}$与$\frac{8^{2k}}{9}$均不是整数，且$\frac{8^{2k-1}}{9}+\frac{8^{2k}}{9}=8^{2k-1}$。

∴ 对任意正整数k，

$$\left[\frac{8^{2k-1}}{9}\right]+\left[\frac{8^{2k}}{9}\right]=\frac{8^{2k-1}}{9}+\frac{8^{2k}}{9}-1=8^{2k-1}-1\equiv 7\pmod{63}。$$

∴ $A=\left[\frac{8}{9}\right]+\left[\frac{8^2}{9}\right]+\left[\frac{8^3}{9}\right]+\cdots+\left[\frac{8^{2014}}{9}\right]\equiv 1007\times 7\equiv 56\pmod{63}$。

12. 方程$x^{[x]}=\frac{9}{2}$的实数解是________________.（其中$[x]$表示不超过x的最大整数）$\frac{3\sqrt{2}}{2}$

解：显然$x>0$．若$x\ge 3$，则$[x]\ge 3$，从而$x^{[x]}\ge 3^3=27>\frac{9}{2}$.

若$0<x<2$，则$0\le[x]<2$，从而$x^{[x]}<2^2=4<\frac{9}{2}$.

所以$2\le x<3$，于是$[x]=2$，故$x^2=\frac{9}{2}$，所以$x=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

八．难题

1．若对于任意的实数x，函数$f(x)=x^2-2x-|x-1-a|-|x-2|+4$的值都是非负实数，则实数$a$的最小值为______________．-2

解：由条件知$\begin{cases} f(0)=-|1+a|+2\ge 0, \\ f(1)=-|a|+2\ge 0, \end{cases}$解得$-2\le a\le 1$．当$a=-2$时，

$f(x)=x^2-2x-|x+1|-|x-2|+4$，即$f(x)=\begin{cases} x^2+3, x<-1, \\ x^2-2x+1, -1\le x\le 2, \\ x^2-4x+5, x>2. \end{cases}$

易知对于任意的实数x, $f(x)$的值都是非负实数，因此$a=-2$符合要求．

所以，实数 a 的最小值为-2.

2．若分数$\dfrac{p}{q}$（p，q为正整数）化成小数为$\dfrac{p}{q}=0.198\cdots$，则当q取最小值时，$p+q=$______________。答　121

解：由$\dfrac{p}{q}=0.198\cdots<\dfrac{1}{5}$，知$\dfrac{p}{q}<\dfrac{1}{5}$，$q>5p$，记$q=5p+m$（$m$为正整数）。

于是，$\dfrac{p}{5p+m}=0.198\cdots$，$0.198(5p+m)<p<0.199(5p+m)$。

∴　$19.8m<p<39.8m$。

当$m=1$时，$20\le p\le 39$，取$p=20$，$m=1$时，q最小为 101。

又$\dfrac{20}{101}=0.19801980\cdots$符合要求。故，当$q$最小时，$p+q=121$。

3．已知 5 个不同的实数，任取两个求和得到 10 个和数，其中最小的三个和数依次为 32、36、37，最大的两个和数为 48 和 51，则这 5 个数中最大的数等于____．27.5

解：设这 5 个数为$a<b<c<d<e$，则$a+b=32$，$a+c=36$，$c+e=48$，$d+e=51$，下面说明$b+c=37$.

因为$c-b=4, d-c=3, d-b=7$，所以$a+d=(a+b)+(d-b)=39$.

故$b+c=37$．所以$2a=(a+b)+(a+c)-(b+c)=31$，

故　$a=15.5, b=16.5, c=20.5, e=27.5, d=23.5$，即最大的数为 27.5.

4．满足 $0 \le k_i \le 20, i=1,2,\cdots,20$，且 $k_1+k_3=k_2+k_4$ 的有序整数组 (k_1,k_2,k_3,k_4) 的个数为______．6181

解：设 $k_1+k_3=k_2+k_4=m$.

当 $0 \le m \le 20$ 时，满足 $x+y=m$，且 $0 \le x,y \le 20$

的非负整数解有 $(x,y)=(j,m-j), 0 \le j \le 20$，共 $m+1$ 组.

当 $21 \le m \le 40$ 时，满足 $x+y=m$，且 $0 \le x,y \le 20$

的非负整数解 $(x,y)=(j,m-j), m-20 \le j \le 20$，共 $40-m+1$ 组.

所以，满足 $k_1+k_3=k_2+k_4$ 的解共有

$$\sum_{m=0}^{20}(m+1)^2+\sum_{m=21}^{40}(41-m)^2=\sum_{m=1}^{21}m^2+\sum_{m=1}^{20}m^2=2\sum_{m=1}^{20}m^2+21^2=2\times\frac{20\times21\times41}{6}+441=6181$$

5．已知集合 A 的元素都是整数，其中最小的为 1，最大的为 200。且除 1 以外，A 中每一个数都等于 A 中某两个数（可以相同）的和。则 $|A|$ 的最小值为____________。（符号 $|A|$ 表示集合 A 中元素的个数） 10

解: 易知集合 $A=\{1,2,3,5,10,20,40,80,160,200\}$ 符合要求。此时，$|A|=10$。

下面说明 $|A|=9$ 不符合要求。

假设集合 $A=\{1,x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,200\}$，$x_1<x_2<x_3<x_4<x_5<x_6<x_7$ 符合要求。

则 $x_1=1+1=2$，$x_2 \le 2+2=4$，$x_3 \le 8$，$x_4 \le 16$，$x_5 \le 32$，$x_6 \le 64$，$x_7 \le 128$。

由于 $x_6+x_7 \le 64+128=192<200$，因此，$200=x_7+x_7$，$x_7=100$。

同理，由 $x_5+x_6 \le 32+64=96<100$，知，$x_7=100=x_6+x_6$，$x_6=50$。

由 $x_4+x_5 \le 16+32=48<50$，知，$x_6=50=x_5+x_5$，$x_5=25$。

由 $x_3+x_4 \le 8+16=24<25$，知，$x_5=25=x_4+x_4$，$x_4=\frac{25}{2}$ 与 x_4 为整数矛盾。

∴ $|A|=9$ 不符合要求，$|A| \ne 9$。同理，$|A| \le 8$ 也不符合要求。

因此，$|A|$ 的最小值为 10。

6．对正数x，记$m=[\frac{x}{2}]+[\frac{x}{2^2}]+[\frac{x}{2^3}]+\cdots+[\frac{x}{2^k}]$，其中 k 为满足$2^k\ge x$有最小整数，符号$[x]$表示不超过$x$的最大整数，$x$与$m$的差，即$x-m$称为正整数$x$的“亏损数”。（如$x=100$时$m=[\frac{100}{2}]+[\frac{100}{2^2}]+[\frac{100}{2^3}]+[\frac{100}{2^4}]+[\frac{100}{2^5}]+[\frac{100}{2^6}]+[\frac{100}{2^7}]=50+25+12+6+3+1+0=97$

$x-m=100-97=3$，因此数 100 的“亏损数”为 3。）则“亏损数”为 9 的最小正整数x为__________511

解：设正整数x的 2 进制表示为$x=a_n\times 2^n+a_{n-1}\times 2^{n-1}+\cdots+a_2\times 2^2+a_1\times 2^1+a_0$

其中$a_i=0或1(i=0,1,2,\cdots,n),且a_n\ne 0$，易知，$x-2[\frac{x}{2}]=a_0,[\frac{x}{2}]-2[\frac{x}{2^2}]=a_1,$

$[\frac{x}{2^2}]-2[\frac{x}{2^3}]=a_2,\cdots,$ $[\frac{x}{2^n}]-2[\frac{x}{2^{n+1}}]=a_n,$

于是

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n=x-2[\frac{x}{2}]+[\frac{x}{2}]-2[\frac{x}{2^2}]+[\frac{x}{2^2}]-2[\frac{x}{2^3}]+\cdots+[\frac{x}{2^n}]-2[\frac{x}{2^{n+1}}]$$

$$=x-[\frac{x}{2}]-[\frac{x}{2^2}]-[\frac{x}{2^3}]-\cdots-[\frac{x}{2^n}]-2[\frac{x}{2^{n+1}}]=x-m$$

所以正整数x的“亏损数”为$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n$，即x的二进制表示式中非零数字的个数，因此，亏损数为 9 的最小正整数为$x=2^8+2^7+\cdots+2^2+2^1+1=2^9-1=511$

7．已知函数$f(x)=\begin{cases} x\text{，若 } x\text{ 为无理数} \\ \dfrac{q+1}{p}\text{，若 } x=\dfrac{q}{p}\text{，其中 } p,q\in N^*\text{，且 } p\text{、}q\text{互质，} p>q \end{cases}$，则函数$f(x)$在区间$(\frac{7}{8},\frac{8}{9})$上的最大值为__________。$\frac{16}{17}$

解：若x为有理数，且$x\in(\frac{7}{8},\frac{8}{9})$。设$x=\frac{a}{a+\lambda}\in(\frac{7}{8},\frac{8}{9})$（$a$，$\lambda\in N^*$），

由$\frac{7}{8}<\frac{a}{a+\lambda}<\frac{8}{9}$知，$\begin{cases}9a<8a+8\lambda\\7a+7\lambda<8a\end{cases}$，$7\lambda<a<8\lambda$。

当$\lambda=1$时，a不存在；

当$\lambda=2$时，存在唯一的$a=15$，此时$x=\frac{15}{17}$，$f(x)=\frac{16}{17}$。

当$\lambda\ge 3$时，设$a=7\lambda+m$，其中$1\le m\le\lambda-1$，且$m\in N^*$，此时$f(x)=\frac{7\lambda+m+1}{8\lambda+m}$。

$\because$ $\frac{16}{17}-\frac{7\lambda+m+1}{8\lambda+m}=\frac{9\lambda-m-17}{17(8\lambda+m)}=\frac{(\lambda-m)+(8\lambda-17)}{17(8\lambda+m)}>0$，

$\therefore$ 若x为有理数，则$x=\frac{15}{17}$时，$f(x)$取最大值$\frac{16}{17}$。

又x为无理数，且$x\in(\frac{7}{8},\frac{8}{9})$时，$f(x)=x<\frac{8}{9}<\frac{16}{17}$。

综合以上可知，$f(x)$在区间$(\frac{7}{8},\frac{8}{9})$上的最大值为$\frac{16}{17}$。